

Transferts thermiques dans une paroi

Arthur Levy, Abderezak Aouali, Nicolas Baudin, Bertrand Garnier

8h30 – 9h30 : CM / Plénier

9h45 – 11h : Atelier 1/2

11h15 – 12h30 : Atelier 2/1

Atelier 1 : Résolution semi-analytique dans une paroi à l’aide des quadripôles

Atelier 2 : Mesure et Instrumentation pour la caractérisation thermique et le CND

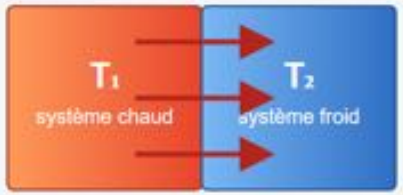
Sommaire

- Généralités transferts thermiques
- Équation de la chaleur dans une paroi
- Résolution (semi) analytique
- Métrologie thermique

Généralités

Le transfert de chaleur entre deux systèmes

Systèmes en contact



Conduction

transfert par contact direct

Systèmes sans contact



Rayonnement

transfert par ondes électromagnétiques

Dès que $T_1 > T_2$, un flux de chaleur apparait spontanément du système chaud vers le système froid

et se poursuit jusqu'à l'équilibre thermique ($T_1 = T_2$)

De la thermodynamique aux transferts thermiques

Thermodynamique : seuls les états d'équilibre sont décrits



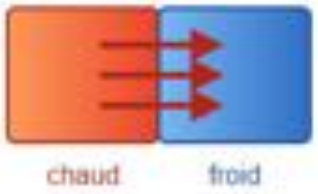
État initial ($T_1 > T_2$)

État final (équilibre $T_1 = T_2$)

Une branche parallèle devient une discipline indépendante : les transferts thermiques

Transferts thermiques : comment et à quelle vitesse la chaleur se transmet

Conduction



Contact direct, de proche en proche
(solides, fluides au repos)

Convection



Transport par le mouvement du fluide
(échange avec une paroi)

Rayonnement



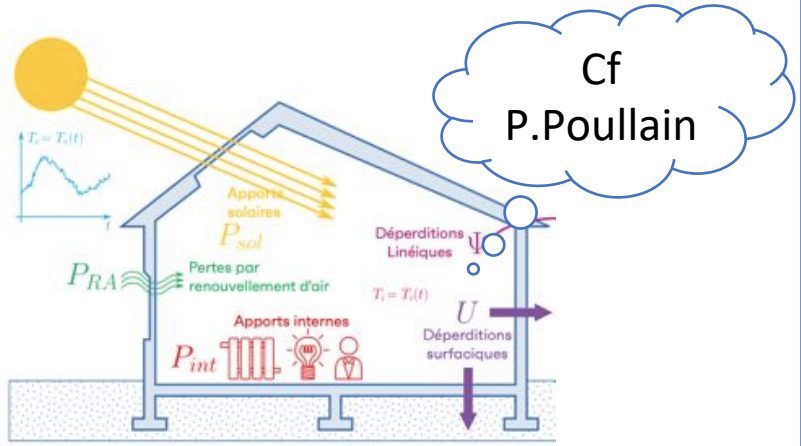
Ondes électromagnétiques
(sans support matériel)

Thermique du bâtiment

Objectif :

- Quantifier les pertes
- Evaluer le pouvoir de régulation

Bâtiment

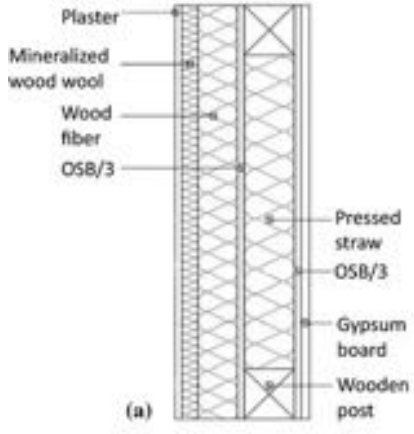


Simulation thermique dynamique :
Pléiade, Perrenoud, Wufi

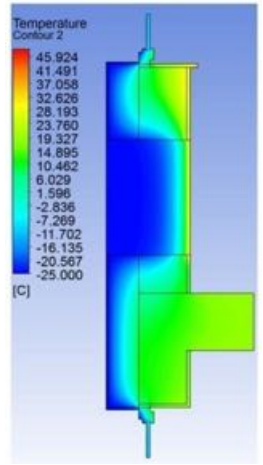
⇨ Certification

Parois





[Li et al 23]



[Kravchuk et al 21]

⇨ $\vec{\phi}(\vec{x},t)\,;T(\vec{x},t)$

Sommaire

- Généralités transferts thermiques
- Équation de la chaleur dans une paroi
- Résolution (semi) analytique
- Métrologie

Loi de Fourier

Milieu continu, homogène

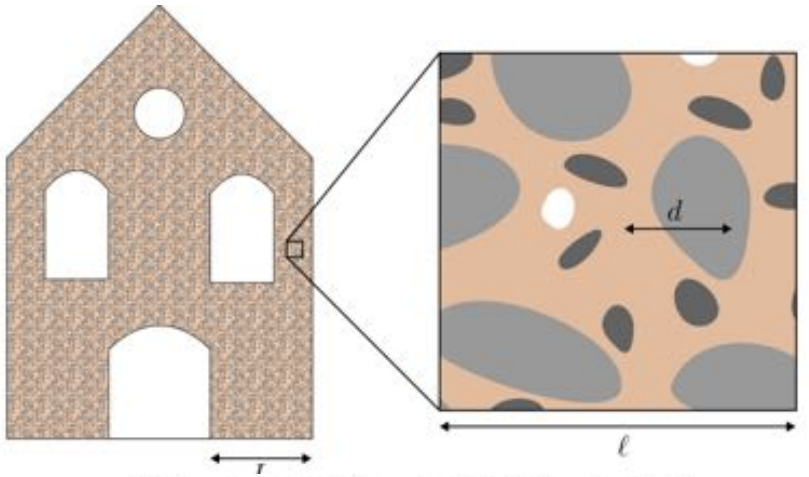
$$\vec{\phi} = -\lambda \vec{\nabla} T$$

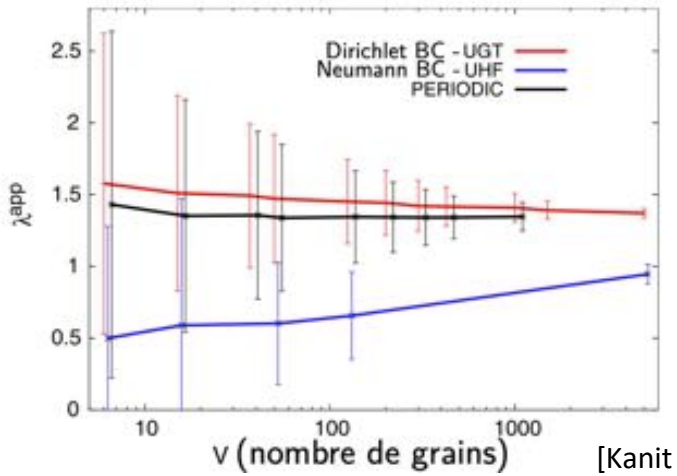
Conductivité thermique équivalente

Materiau	*k* (W/m/K)
Acier	
Granite	
Mortier de chaux	
Béton	
Terre crue	
Pin	
Laine de bois	
Air	

Cf François Bignonnet

Volume élémentaire représentatif





[Kanit et al 03]

1cm ? 20 cm ?

Équation de la chaleur

Bilan d'énergie

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial e}{\partial T}}_{\rho c_p} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Capacité calorifique

Comportement (Fourier)

$$\vec{\phi} = -k\vec{\nabla}T$$

Équation de la chaleur

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T$$

Pas de source
Pas de dissipation
Pas de changement d'état
Propriétés constantes

⇨ PDE linéaire

Matériau	c_p (J/kg/K)	ρ (kg/m³)
Acier	500	8000
Granite	1000	2600
Mortier de chaux	1000	1500
Plâtre	1000	1000
Béton	1000	2100
Terre crue	1000	1700
Pin	1600	500
Laine de bois	2000	100
Air	1000	1
Eau	4200	1000

Conditions aux limites

Ordre de grandeur de h

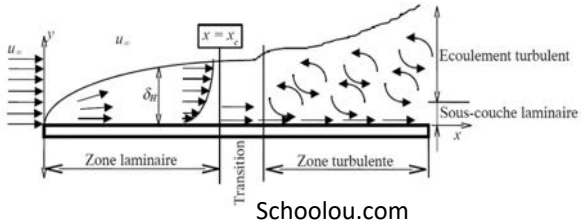
Convection naturelle 5-20 /m²/K



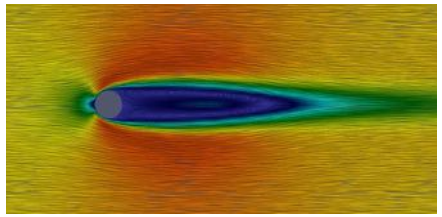
Convection forcée 100 W/m²/K et plus



Obtenir h par corrélations



Schoolou.com



Messaoudi, univ Batna

$$Nu = \frac{h_c L}{\lambda} \qquad Pr = \frac{\mu c}{\lambda} \qquad Re = \frac{V L}{\nu}$$

géométrie de la section	Nu_T	Nu_{H1}	Nu_{H2}	CERe	D_h	$\frac{L_h}{D_h Re}$	$\frac{L_T}{D_h Pe}$	$\frac{L_{H2}}{D_h Pe}$
triangle équilatéral de côté a	2,47	3,111	1,892	13,333	a/√3			
carré de côté a	2,976	3,608	3,091	14,227	a	0,09	0,041	0,066
hexagone de côté a	3,34	4,002	3,862	15,054	a √3			
cercle de diamètre d	3,657	4,364	4,364	16	d	0,056	0,033	0,043
rectangle L/a = 2	3,391	4,123	3,017	15,548	4a/3	0,085	0,049	0,057
rectangle L/a = 4	4,439	5,331	2,930	18,233	8a/5	0,075	0,054	0,042
rectangle L/a = 8	5,597	6,490	2,904	20,585	16a/9			
rectangle L/a = ∞	7,541	8,235	8,235	24	2a	0,011	0,008	0,012
rectangle L/a = ∞ isolé sur une face	4,861	5,385	5,385	24	2a	0,011		

Table 1 : Nombres de Nusselt [3] ; Longueurs d'établissement [4]

L'équation de la chaleur est-elle vraiment linéaire ?

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\phi(x=0,t) = -h\,(T - T_\infty)$$

$$T(x, t=0) = T_0$$

Avantages

- Principe de superposition
- Analyse dimensionnelle
- Résolution simplifiée

Limites

- Propriétés thermo-dépendantes
  (peu sur des dT du bâtiment)
- Conditions au bord non-linéaire
- Couplage thermo-hydrique
- Source de chaleur non linéaire
- …

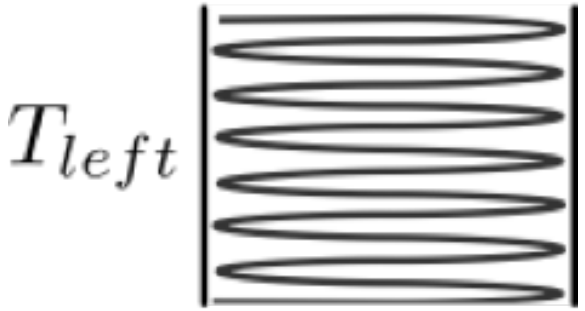
Cf. P. Coussot

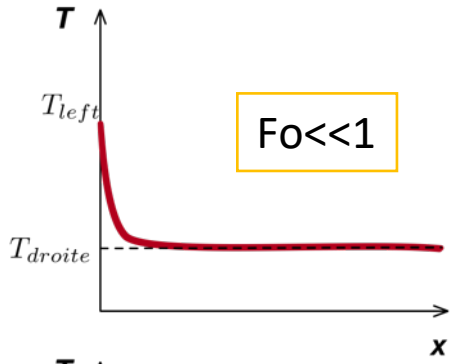
MCP, cinétique cf GDR 2025

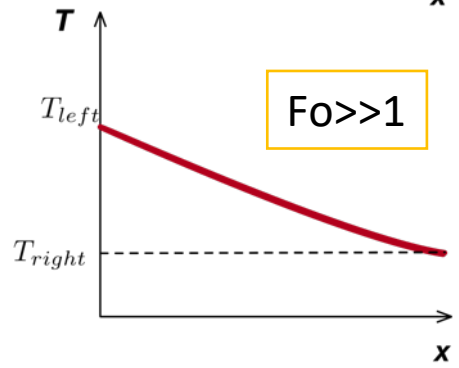
Analyse dimensionnelle

Nombre de Fourier

$$Fo = \frac{\lambda t}{\rho c_p e^2}$$





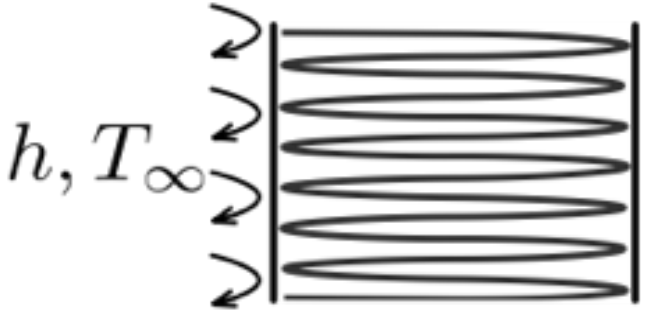


Diffusivité thermique:

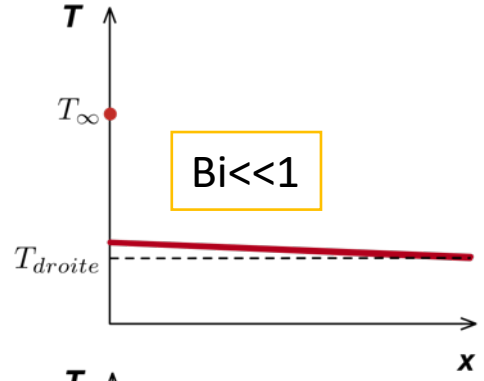
$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

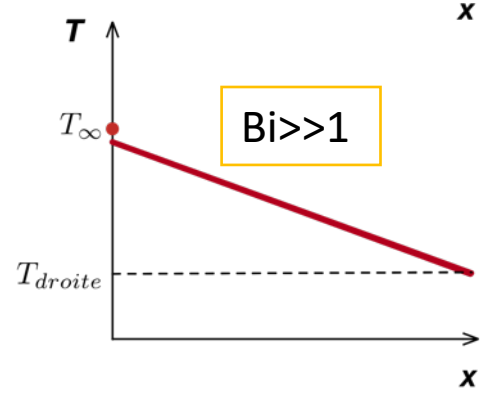
Temps caractéristique de diffusion:

Nombre de Biot



$$Bi = \frac{h}{\lambda e}$$





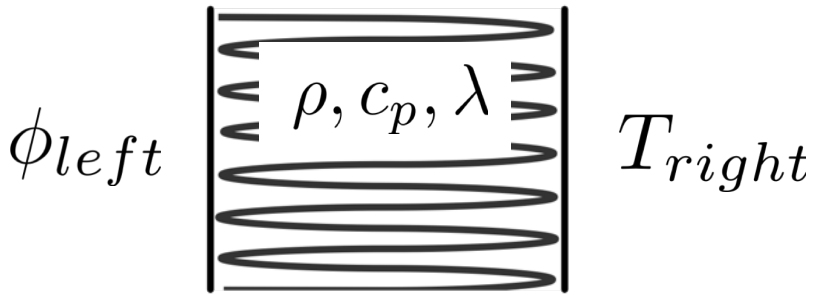
Sommaire

- Généralités transferts thermiques
- Équation de la chaleur dans une paroi
- Résolution (semi) analytique
- Métrologie

Méthodes de résolutions

Semi analytique

1D, linéaire, transitoire



- Séparation de variables
- Harmonique / Fourier
- Laplace

Cf P. Poulain

Numérique

Géométrie + complexes

fr.freepik.com

Pont thermique

Non-linéarités

- Thermodépendance
- Radiatif
- MCP

Cf GDR 2025

- Différences finies
- Eléments finis
- Volumes finis

FREEFEM COMSOL WUFI® Ansys

Rappel transformée de Laplace

$$\int_0^{\infty} T(t)\exp(-pt)dt = \widetilde{T}(p)$$

Signal réel

Temps, ***t***

$$T(t)$$

$$dT/dt$$

EDO (∂t)

EDP (∂x, ∂t)



Spectre

Fréquence, ***p***

$$\widetilde{T}(p)$$

$$p \times \widetilde{T}(p) - T(t=0)$$

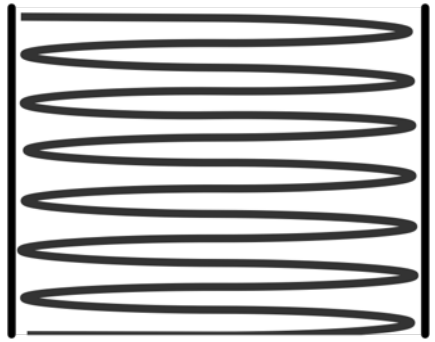
Équation algébrique en *p*

EDO (∂x,p)

Application au mur (équation de la chaleur 1D)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ρ, c_p, λ



Laplace

$$\rho c_p p \widetilde{T}(p,x) = \lambda \frac{\partial \widetilde{T}(p,x)^2}{\partial x^2}$$

PFLI: $T_{init} = 0$

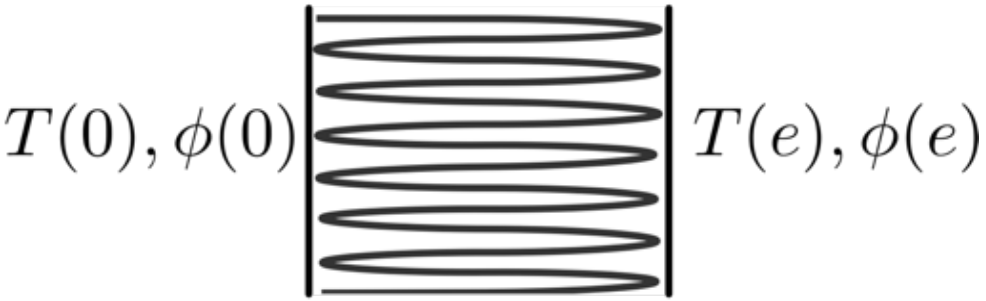
Intégration en x

$$\widetilde{T}(p,x) = A.\cosh\left(\sqrt{p/a}.x\right) + B.\sinh\left(\sqrt{p/a}.x\right)$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

Application au mur (équation de la chaleur 1D)

$$\widetilde{T}(p,x) = A.\cosh\left(\sqrt{p/a}.x\right) + B.\sinh\left(\sqrt{p/a}.x\right)$$

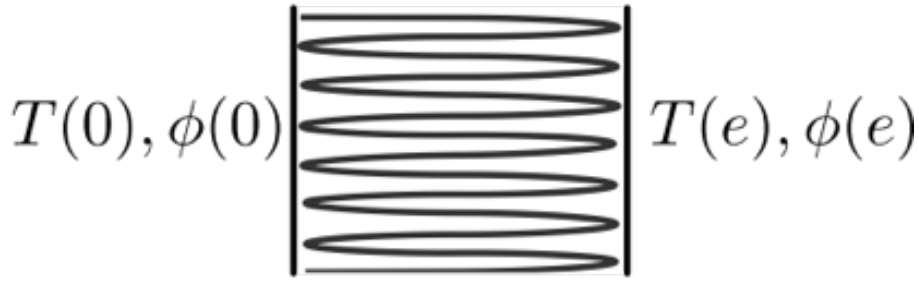


Evaluations aux limites :

$$\begin{cases} \widetilde{T}(p,0) = A \\ \widetilde{T}(p,e) = A.\cosh\left(\sqrt{p/a}.e\right) + B.\sinh\left(\sqrt{p/a}.e\right) \\ \widetilde{\phi}(p,0) = \lambda\dfrac{\partial\widetilde{T}}{\partial x}(p,0) = B.\sqrt{p/a} \\ \widetilde{\phi}(p,e) = -\lambda\dfrac{\partial\widetilde{T}}{\partial x}(p,e) = -A.\sqrt{p/a}\sinh\left(\sqrt{p/a}.e\right) + B.\sqrt{p/a}\cosh\left(\sqrt{p/ae}\right) \end{cases}$$

4 eq., 4 inc.

Quadripôle thermique



On élimine A et B:

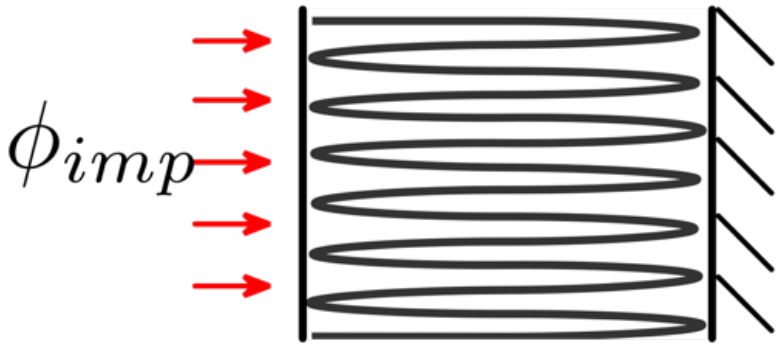
2 eq., 2 inc.

$$\begin{pmatrix} \widetilde{T}(p,0) \\ \widetilde{\phi}(p,0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{p/a}.e) & -\frac{1}{\lambda\sqrt{p/a}}\sinh(\sqrt{p/a}.e) \\ -\lambda\sqrt{p/a}\sinh(\sqrt{p/a}.e) & \cosh(\sqrt{p/a}.e) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{T}(p,e) \\ \widetilde{\phi}(p,e) \end{pmatrix}$$

Que l'on écrit simplement :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{T}(p,0) \\ \widetilde{\phi}(p,0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{T}(p,e) \\ \widetilde{\phi}(p,e) \end{pmatrix}$$

Quadripôle thermique premier exemple



inconnu

$$\begin{pmatrix} \widetilde{T}(p,0) \\ \widetilde{\phi}(p,0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{T}(p,e) \\ \widetilde{\phi}(p,e) \end{pmatrix}$$

inconnu

imposé

=0

Laplace

$$\widetilde{\phi}(p,0) = \phi_{imp}/p$$

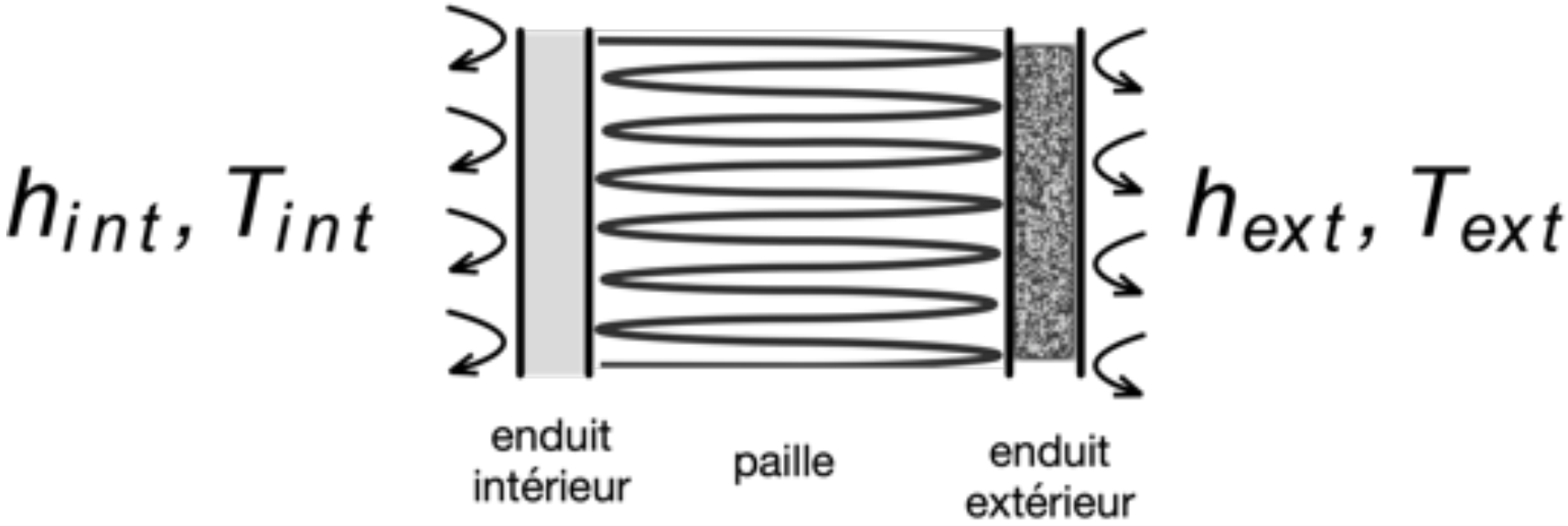
numérique

Résolution algébrique

Laplace inverse

numérique

Multicouche

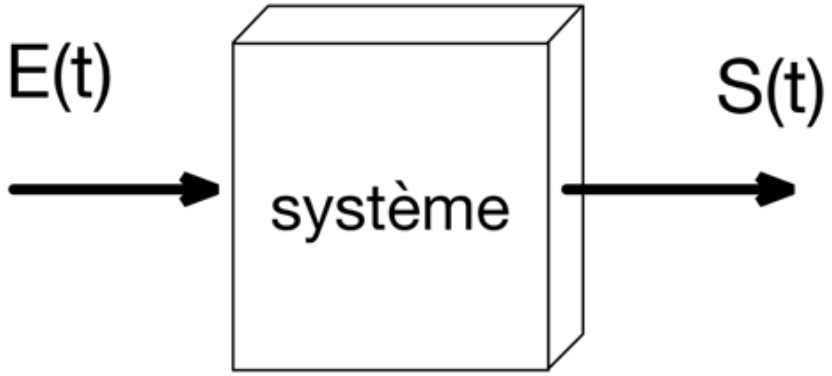


$$\begin{pmatrix} \theta(0,p) \\ \phi(0,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(e,p) \\ \phi(e,p) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \theta(e,p) \\ \phi(e,p) \end{pmatrix},$$

Cf Atelier

Réponse impulsionnelle

Un système linéaire invariant dans le temps et continu est décrit par sa réponse impulsionnelle



Entrée δ, sortie R_{imp}

Entrée *E(t)* sortie $S(t) = R_{imp} * E(t)$

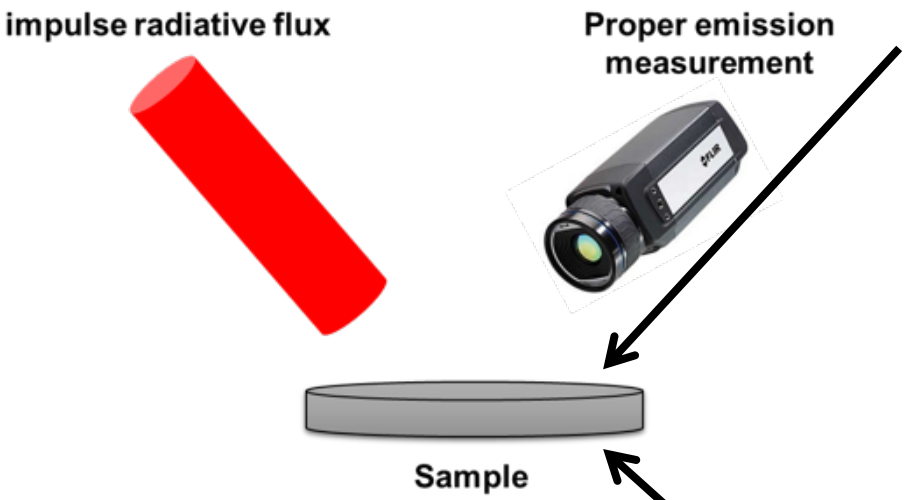
convolution

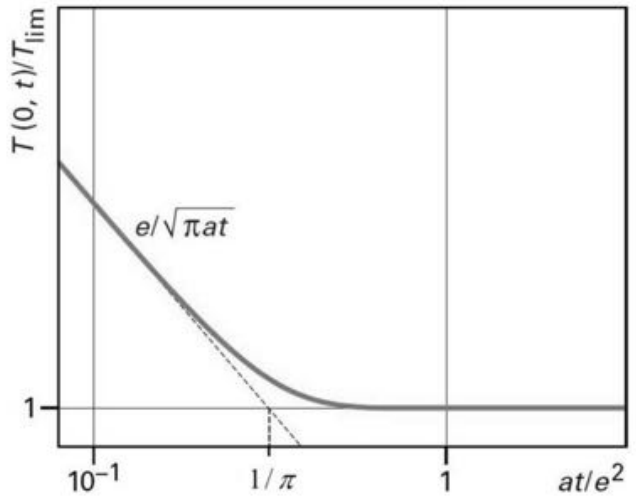
Fonction de transfert

Entrée 1, sortie $\widetilde{R}_{imp} = H$

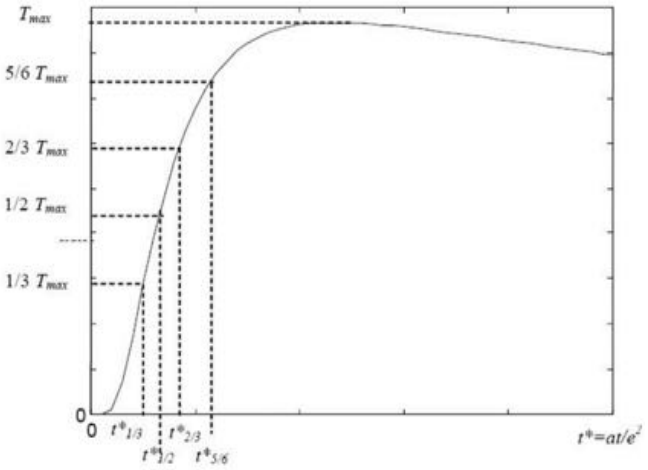
Entrée $\widetilde{E}(p)$, sortie $\widetilde{S} = \widetilde{E}(p) \times H$

Cas d'une excitation flash



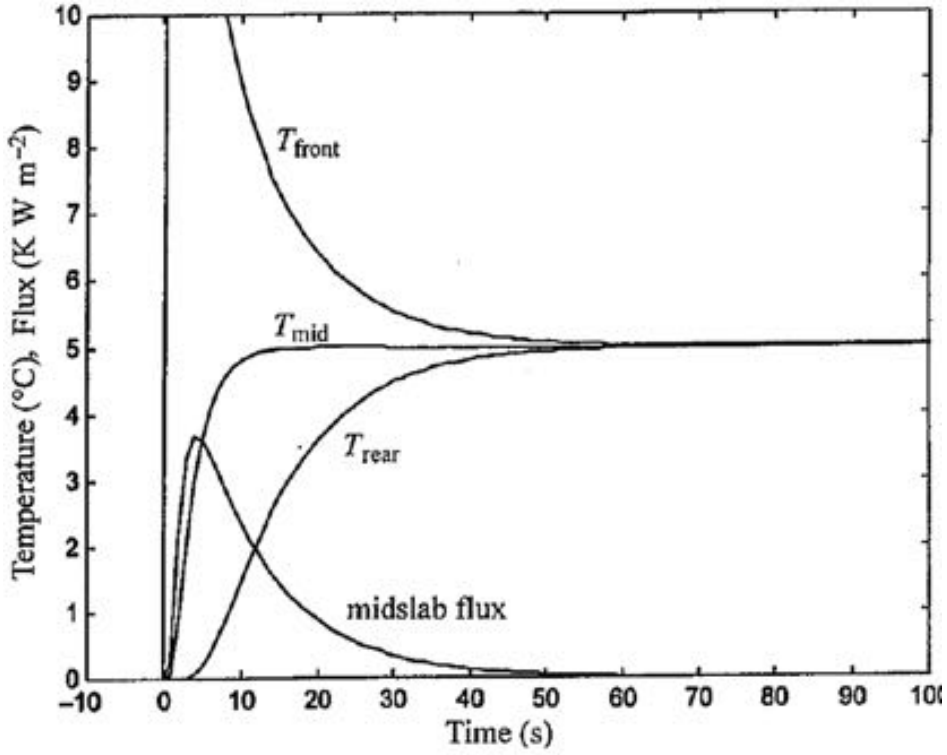


$$\theta(0,p) = \frac{Q.A(p)}{C(p)} = \frac{Q}{\lambda\sqrt{(p/a)}\tanh(e\sqrt{(p/a)}}$$



$$\theta(e,p) = \frac{Q}{C(p)} = \frac{Q}{\lambda\sqrt{(p/a)}\sinh(e\sqrt{(p/a)}}$$

Étude asymptotique



Temps courts : Fo<<1

Face avant : $T_{lim} = \frac{Q}{\rho C_p e}$ **Face arrière :**

$$T_1(t) \cong \frac{Q}{b\sqrt{\pi\, t}} \cong T_{lim}\frac{e}{\sqrt{\pi a t}} \qquad T_2(t) \cong \frac{2Q}{\rho\, C_p}\frac{1}{\sqrt{\pi a t}}\, e^{-\frac{e^2}{4at}}$$

Cf atelier

Temps longs : Fo>>1

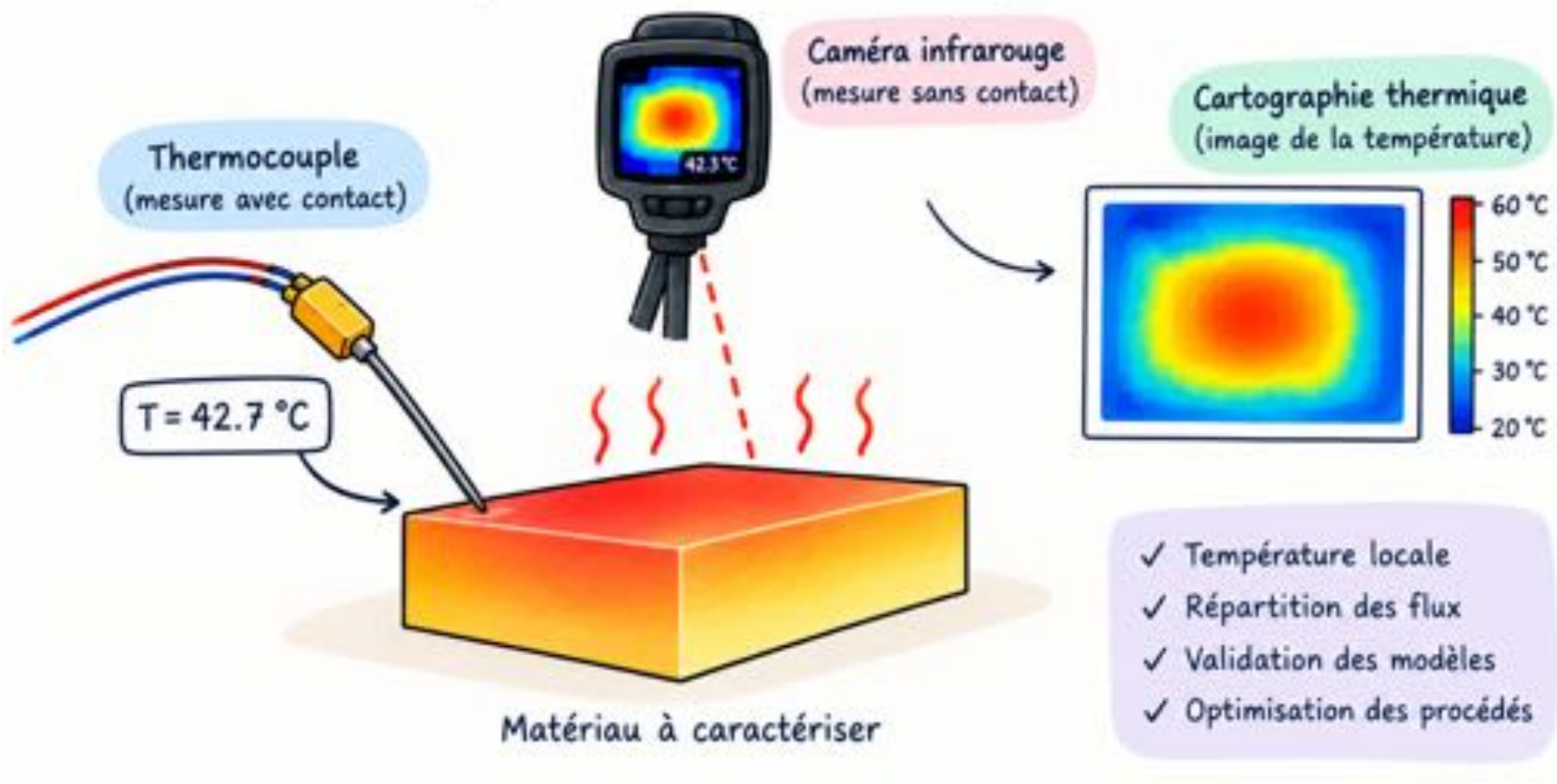
Face avant : **Face arrière :**

$$T_2(t) \cong T_1(t) \cong \frac{Q}{\rho\, C_p\, e} = T_{lim}$$

Sommaire

- Généralités transferts thermiques
- Équation de la chaleur dans une paroi
- Résolution (semi) analytique
- Métrologie

Métrologie thermique



Principe de la mesure de T et étalonnage des capteurs

Capteur de « T »

Mesure d'une grandeur thermométrique « f » qui dépend de « T »

Nécessité d'un étalonnage « f(T) »

Étalonnage absolue

Tableau 1 : Points fixes pour l'étalonnage de capteur thermométrique

Point fixe	Température en °C
ébullition de l'hélium	-268,93
ébullition de l'oxygène	-182,970
point triple de l'eau	0,01
ébullition du soufre	444,606
solidification de l'antimoine	630,5
solidification de l'argent	960,8
solidification de l'or	1063,0

B. Garnier, Métrologie thermique

Étalonnage comparatif

« f(T) » est déterminée par comparaison avec celle d'un capteur étalon dont on connaît avec précision la loi thermométrique ***« f'(T) »***

Sensibilité et inertie d'un capteur thermométrique

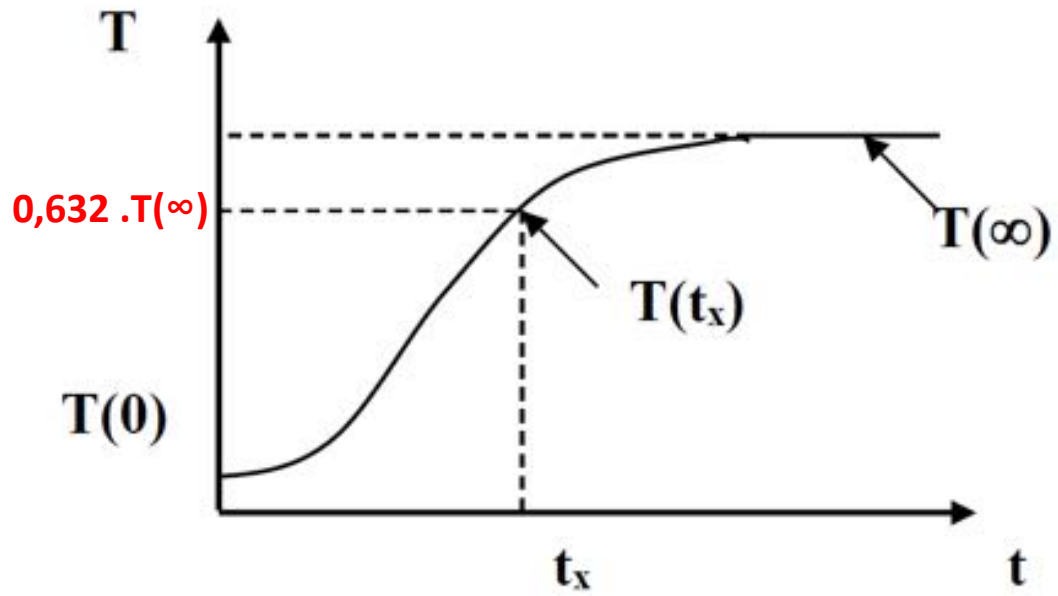
Variation de la grandeur thermométrique « ***f*** » avec la température ➚

⇩

La sensibilité ➚

$$s = \frac{1}{f}\frac{df}{dT} \quad \text{avec} \quad s \text{ en } K^{-1}$$

τ retard de réponse face à une variation brusque de la température du milieu qu'il doit mesurer



Capteur stabilisé (à plus de 99 %) ==> délai de 3 à 5 × τ.

Mesure de température par contact

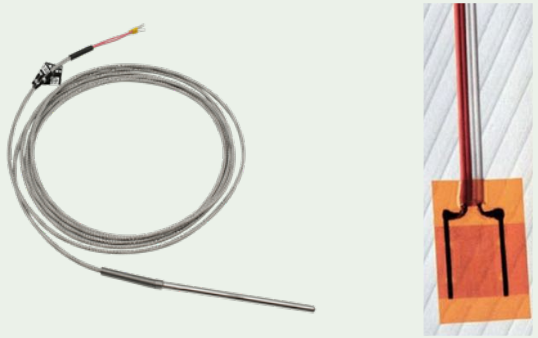






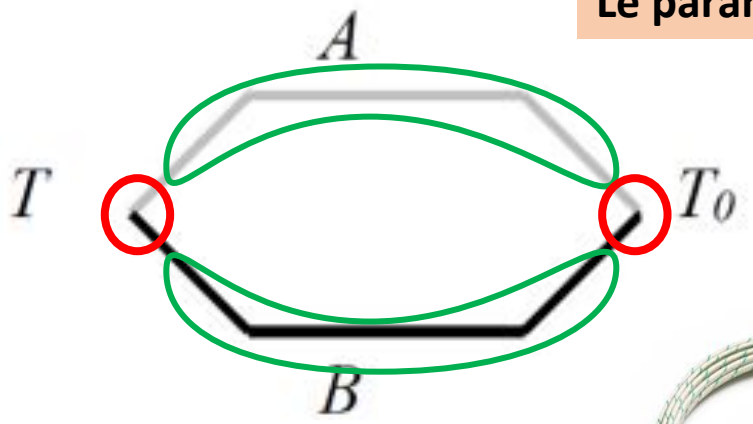
Sondes à variation de résistance électrique

Le paramètre thermosensible ==> résistance électrique Ω .

	Sonde métallique (SM)	**Thermistances (TM)**
		
lois empiriques de calibration	$R = R_0 [1 + a(T - T_0) + b(T - T_0)^2]$	$R = R_0 \exp[B (1/T - 1/T_0)]$
sensibilités	De l'ordre de $10^{-3} K^{-1}$	10 fois plus que les SM
Stabilité et type de réponse	Bonne stabilité / réponse presque linéaire	Beaucoup moins stables que SM / réponse fortement non linéaire
Temps de réponse	Plusieurs dizaines de secondes	De quelques secondes à plusieurs dizaines
formes géométrique	sondes plates et les sondes cylindriques	Perle, disque ou barreau
Gamme de « T »	-200 à 1000 °C	-50 à 500°C

Les couples thermoélectriques

Le paramètre thermosensible ==> Tension électrique V .



$$e_{AB}(T_o,T) = \underbrace{\Pi_{AB}(T) - \Pi_{AB}(T_o)}_{\text{terme prépondérant (effet Peltier)}} + \underbrace{\int_{T_o}^{T}(\tau_A - \tau_B)dT}_{\text{terme secondaire (effet Thomson 10 à 20\% du premier)}}$$



- Loi empirique de calibration :

$$e(T_O, T) = a(T_O)(T - T_O) + b(T_O)(T - T_O)^2$$

- Réponse fortement non-linéaire.
- Temps de réponse très petit.
- Stabilité moyenne

Tableau 4 : Principaux couples thermoélectriques normalisés

Couple de métaux	Sensibilité moyenne, a (µV/K)	Domaine d'utilisation en °C
fer - constantan (J)	55	0 à 600
cuivre-constantan (T)	51	200 à 350
chromel-alumel (K)	41	-200 à 1200
chromel-constantan (E)	78,5	-200 à 900
platine 10% rhodium-platine (S)	11,4	0 à 1600
platine 13% rhodium-platine (R)	12,9	0 à 1600
platine 30% rhodium-platine (B)	10,6	600 à 1700
tungstène -3% rhénium - tungstène 25% rhénium*	15	1500 à 2400

* : couple non normalisé

Mesure de température sans-contact



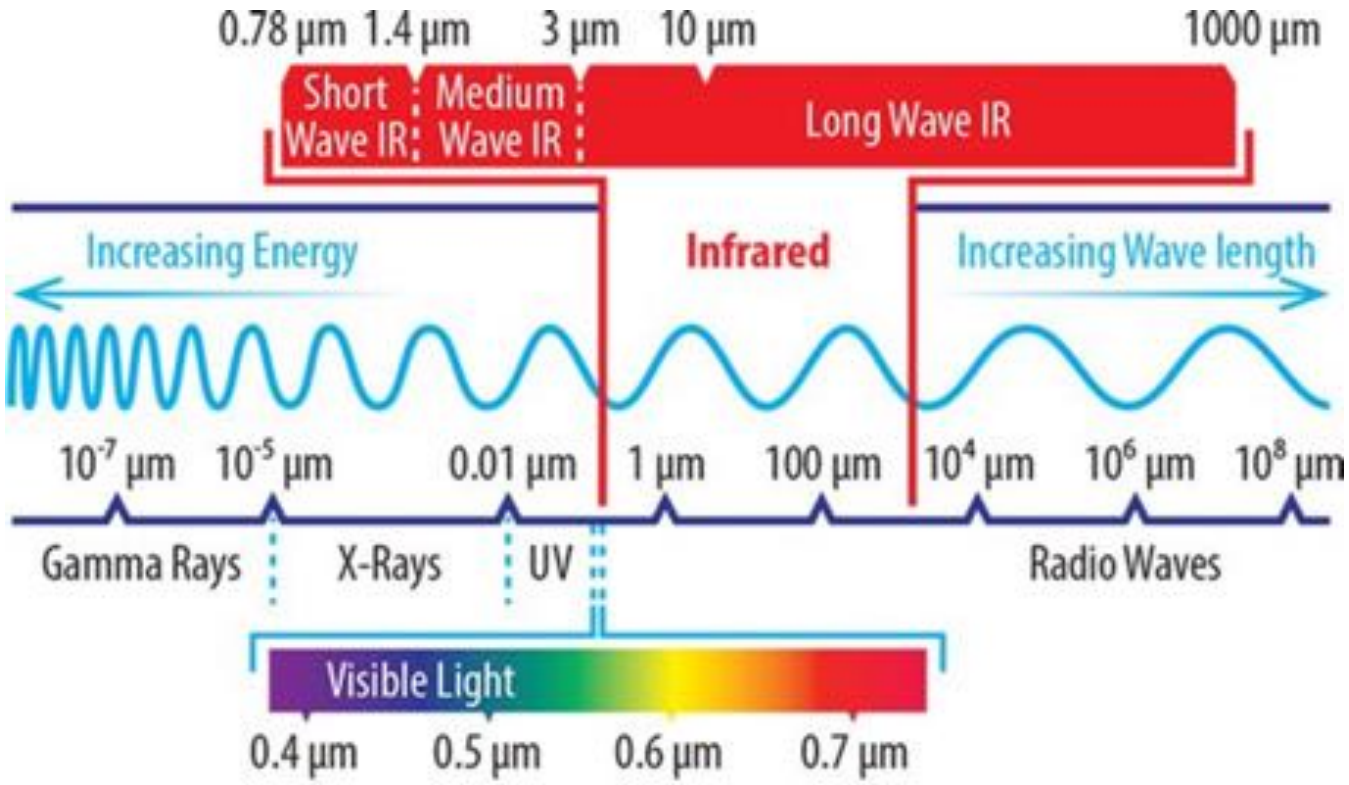


Généralités

Mesure de « T » sans contact

Relation entre une grandeur radiative « f » et « T »

Comprendre les lois d'émission des corps réels



Spectre des ondes électromagnétiques.

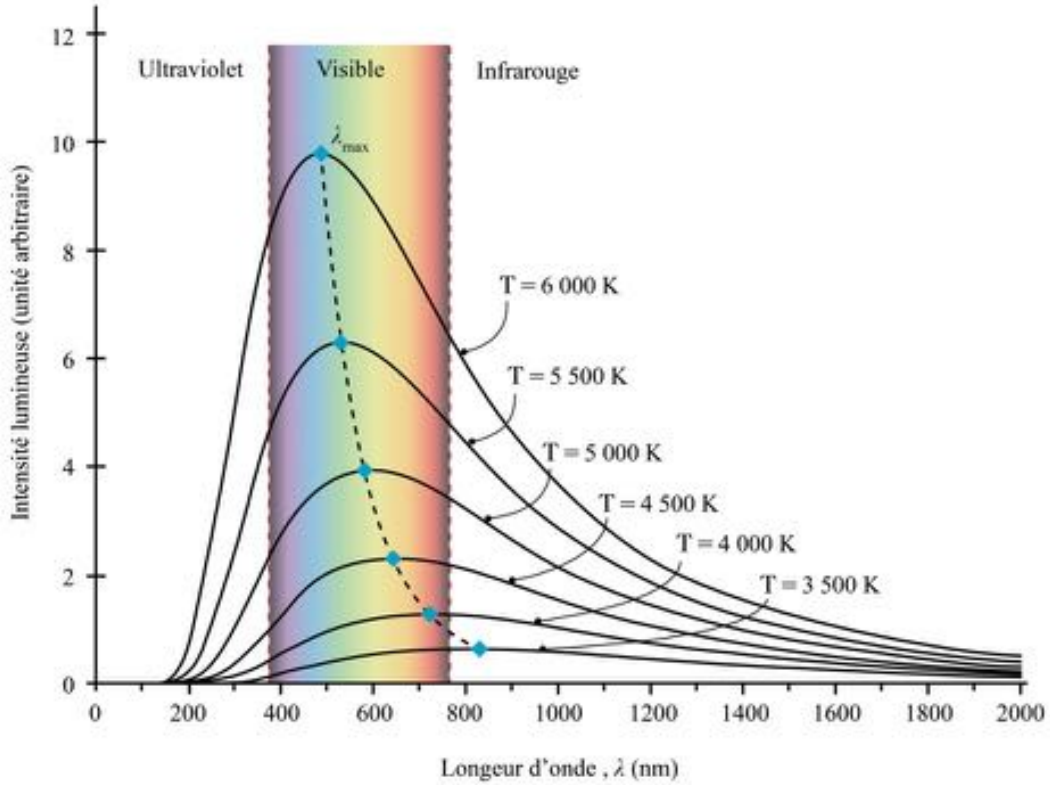
Notion du Corps Noir :
absorbeur et émetteur idéal

Loi de Planck

Loi est fondamentale en rayonnement thermique : corrèle l'émittance monochromatique (ou luminance monochromatique) du corps noir à sa température absolue d'équilibre T ainsi qu'à la longueur d'onde λ considérée.

$$M_\lambda^\circ = \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$$

λ est la longueur d'onde [m].
T la température absolue [K].
h la constante de Planck, de valeur $6.6255.10^{-34}$ [J.s].
k la constante de Boltzmann, de valeur $1.3805.10^{-23}$ [J/K].
c la célérité des ondes électromagnétique dans le vide $\approx 3.10^8$ [m/s].

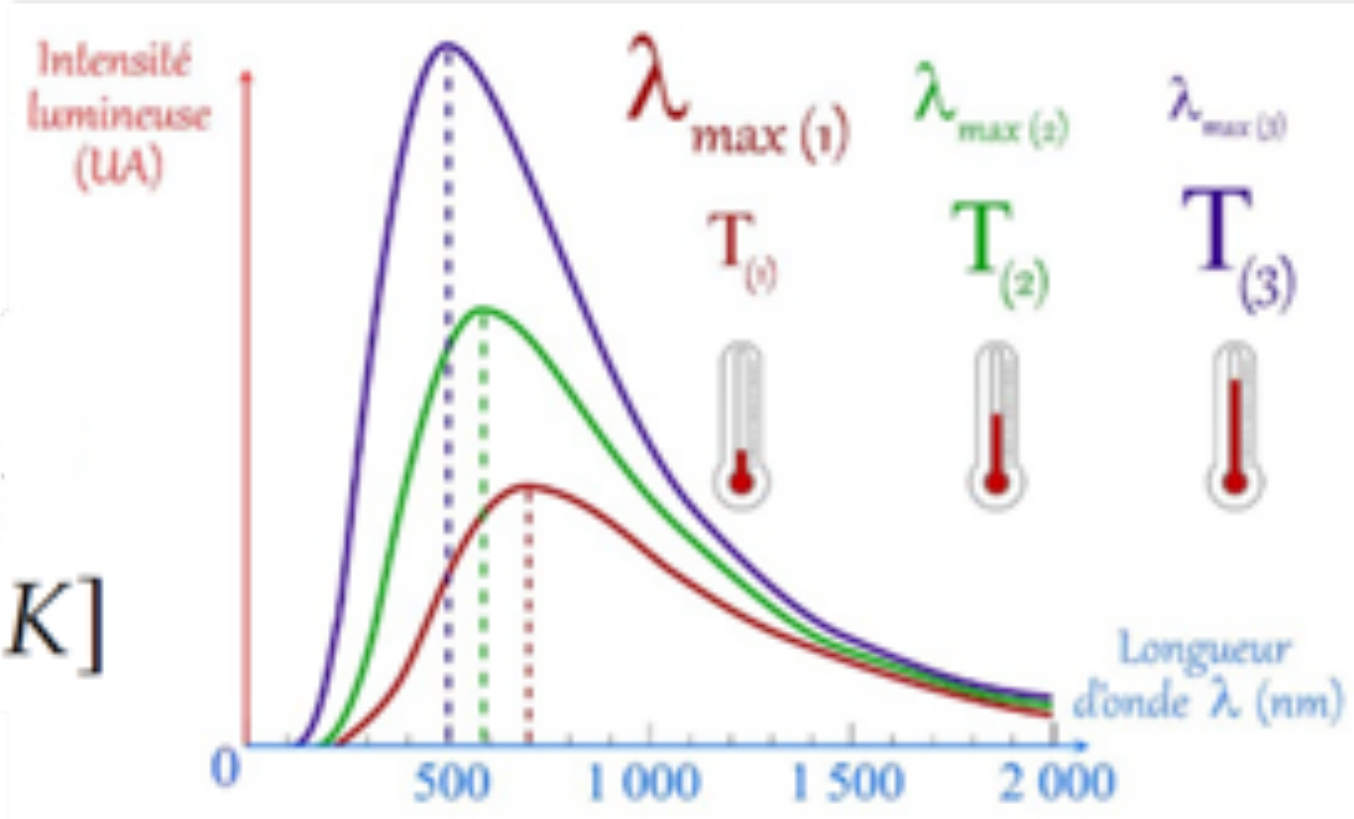


Loi de Wien

Cette loi permet de calculer la longueur d'onde particulière λ_{max} correspondant, pour une température T donnée, au maximum d'émittance monochromatique.

$$\frac{dM^{\circ}_{\lambda}}{d\lambda} = 0 \quad \text{à} \quad T \quad \text{fixée.}$$

$$\lambda_{max} \cdot T = 2898 \qquad [\mu m \cdot K]$$



Loi de Stefan-Boltzmann

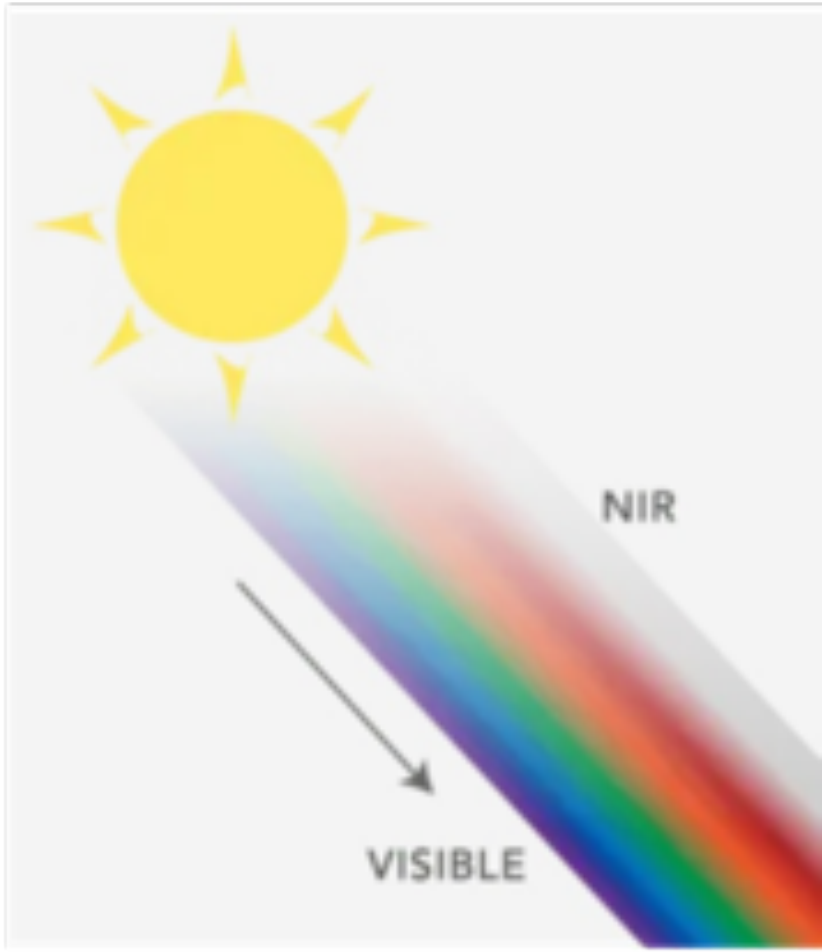
Elle exprime l'émittance totale M° du rayonnement du corps noir dans le vide en fonction de sa température absolue.

$$M^{\circ} = \int_{\lambda=0}^{\lambda=+\infty} M_{\lambda}^{\circ} \cdot d\lambda$$

$$M^{\circ} = \sigma \cdot T^4$$

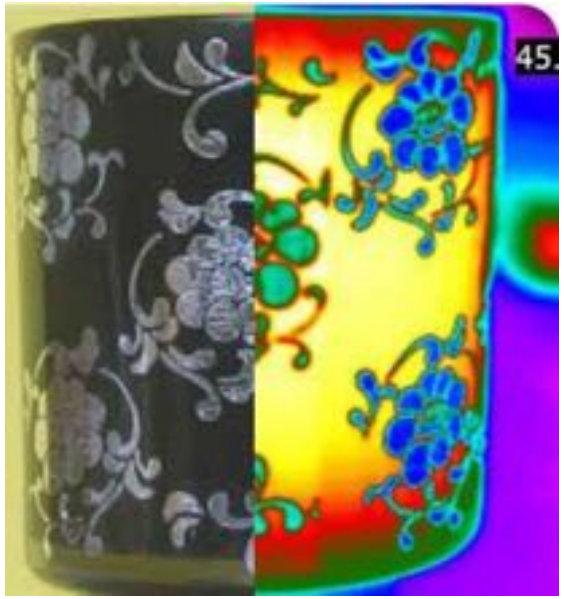
$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \qquad [W/(m^2 \cdot K^4)]$$

Constante de Stefan-Boltzmann



Notion d'émissivité

- **Grandeur très importante : décrit la façon dont un corps réel émet par rapport au CN.**
- **Notée ε et comprise entre 0 et 1.**
- **Dépend de λ, T, et la direction.**
- **Un corps réel ne peut pas émettre plus qu'un CN.**

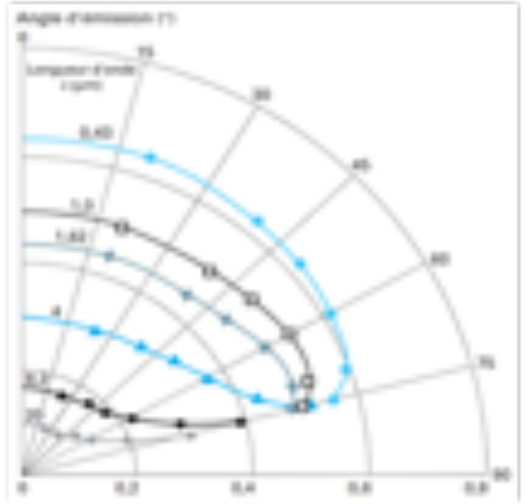
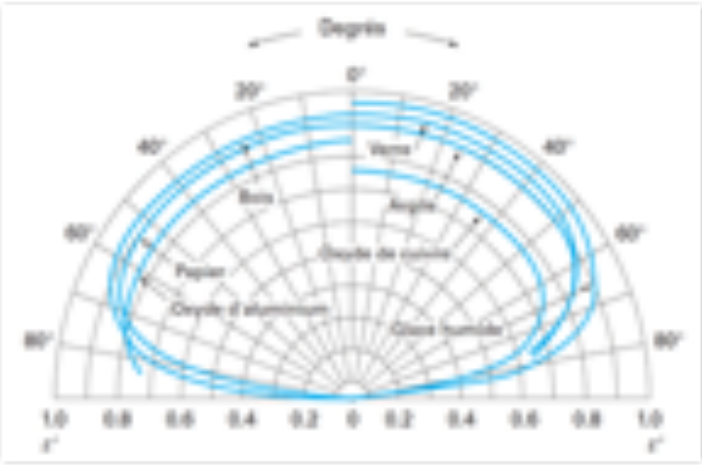
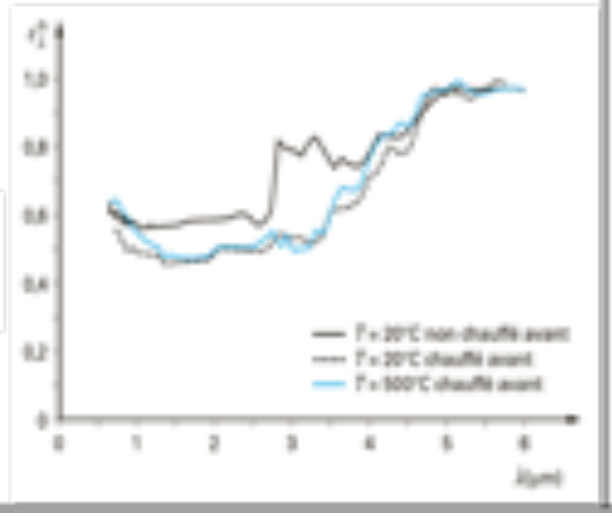
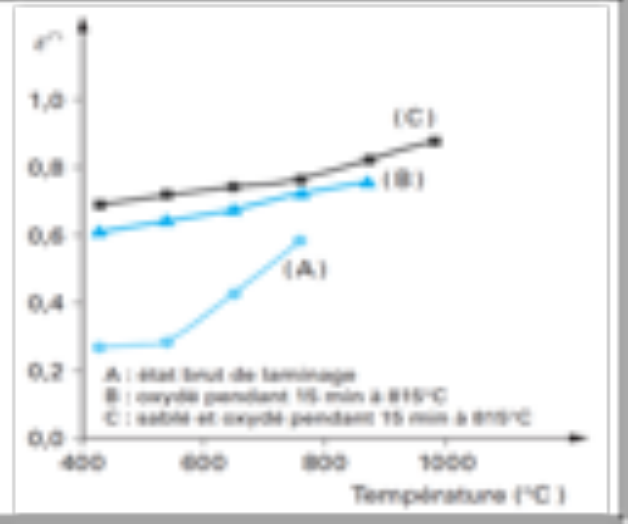


Loi de Kirchhoff à l'état d'équilibre thermique

$$\alpha_j(\vec{d},\lambda,T) = \frac{L_j(\vec{d},\lambda,T)}{L^{\circ}(\lambda,T)} = \varepsilon_j(\vec{d},\lambda,T)$$



Différents facteurs de propagation

	Monochromatique	Totale
Directionnelle	$\varepsilon(\vec{d},\lambda,T) = \frac{L(\vec{d},\lambda,T)}{L^{\circ}(\lambda,T)}$ 	$\varepsilon(\vec{d},T) = \frac{L(\vec{d},T)}{L^{\circ}(T)}$ Avec : $L^{\circ}(T) = \frac{M^{\circ}(T)}{\pi} = \frac{\sigma T^4}{\pi}$ 
Hémisphérique	$\varepsilon(\lambda,T) = \frac{M(\lambda,T)}{M^{\circ}(\lambda,T)}$ 	$\varepsilon(T) = \frac{M(T)}{M^{\circ}(T)} = \frac{M(T)}{\sigma T^4}$ 

Principe de mesure de T par pyrométrie

Mesure un flux proportionnel à la luminance ==> calibration faite via la loi de Planck

Pyrométrie monochromatique	Mesure à une seule λ	$L_1 = \varepsilon(\lambda_1) \frac{C_1 {\lambda_1}^{-5}}{exp\left(\frac{C_2}{\lambda_1 T}\right)-1}$	Nécessité de connaître ε
Pyrométrie bichromatique	Mesure à une deux λ	$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\varepsilon(\lambda_1) \frac{C_1 {\lambda_1}^{-5}}{exp\left(\frac{C_2}{\lambda_1 T}\right)-1}}{\varepsilon(\lambda_2) \frac{C_1 {\lambda_2}^{-5}}{exp\left(\frac{C_2}{\lambda_2 T}\right)-1}} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-5} \frac{exp\left(\frac{C_2}{\lambda_2 T}\right)-1}{exp\left(\frac{C_2}{\lambda_1 T}\right)-1}$	on peut s'affranchir de ε, à condition que $\varepsilon(\lambda_1) = \varepsilon(\lambda_2)$
Pyrométrie polychromatique	Mesure à plusieurs λ	Autant d'équations que de λ	on peut mieux s'affranchir de ε, plusieurs combinaisons possibles

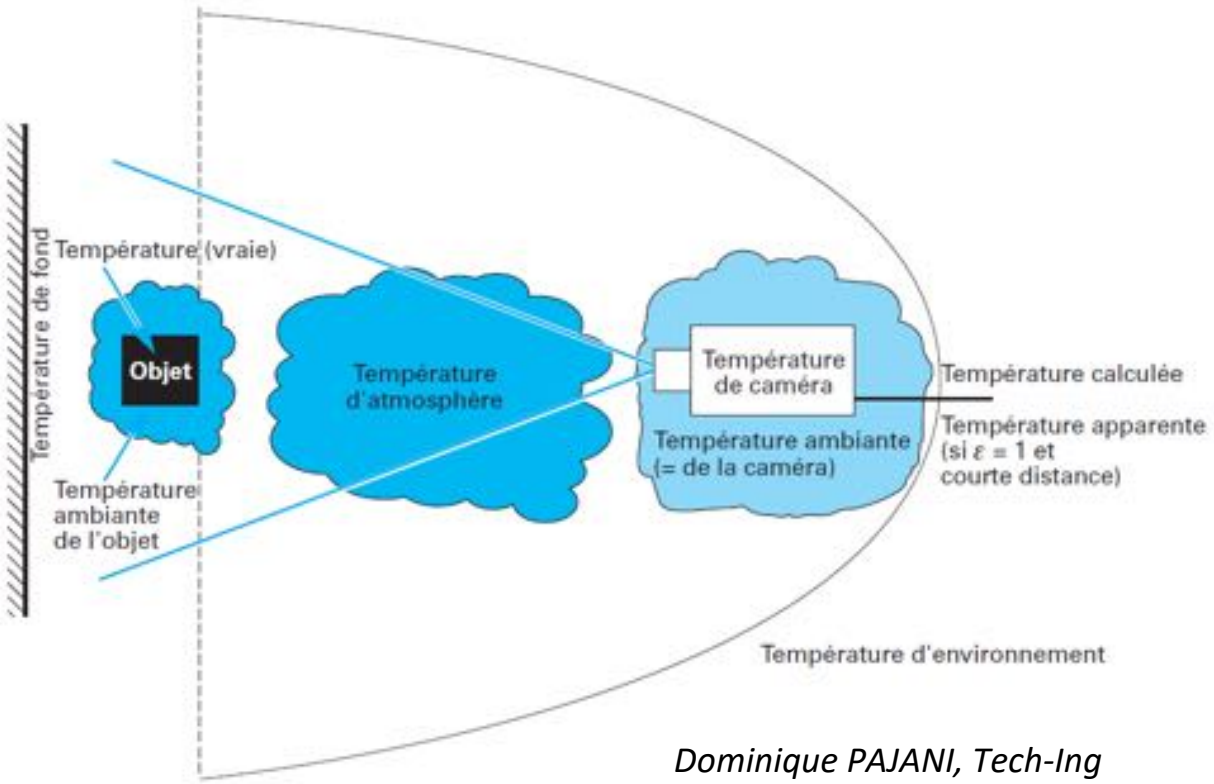
Principe de mesure de T par thermographie IR

La caméra IR mesure un flux proportionnel à la luminance, nécessité d'un étalonnage par CN.

Dans le cas d'un corps opaque, on a :

$$I_0' = \tau_{at}\varepsilon_0 I_0 + \tau_{at}(1-\varepsilon_0) I_e + (1-\tau_{at}) I_{at}$$

Luminance mesurée	Influence de l'objet	Influence de l'environnement	Influence de l'atmosphère



Dominique PAJANI, Tech-Ing

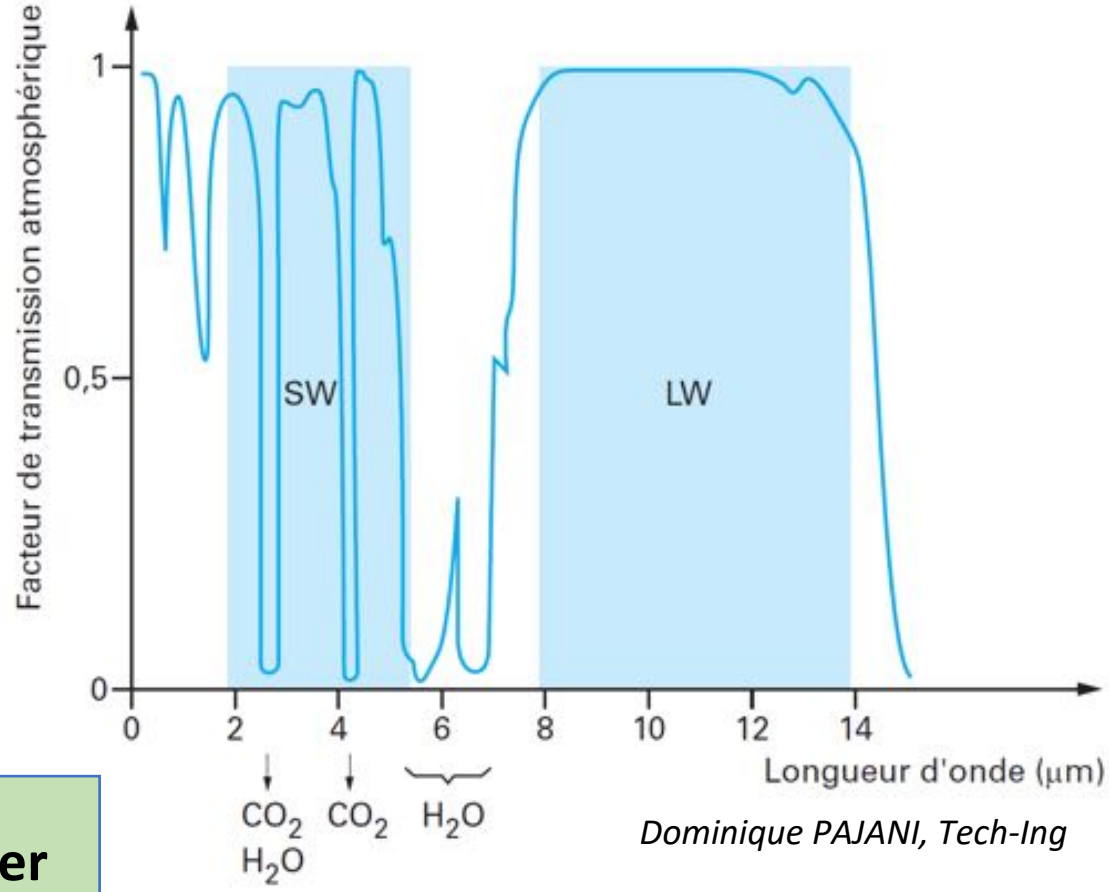
Principe de mesure de T par thermographie IR

La caméra IR mesure un flux proportionnel à la luminance, nécessité d'un étalonnage par CN.

Dans le cas d'un corps opaque, on a :

$$I'_0 = \tau_{at}\varepsilon_0 I_0 + \tau_{at}(1-\varepsilon_0) I_e + (1-\tau_{at}) I_{at}$$

- I'_0 : Luminance mesurée
- $\tau_{at}\varepsilon_0 I_0$: Influence de l'objet
- $\tau_{at}(1-\varepsilon_0) I_e$: Influence de l'environnement
- $(1-\tau_{at}) I_{at}$: Influence de l'atmosphère



Dominique PAJANI, Tech-Ing

Possibilité de limiter son influence expérimentalement

Possibilité de le mesurer expérimentalement et de le soustraire

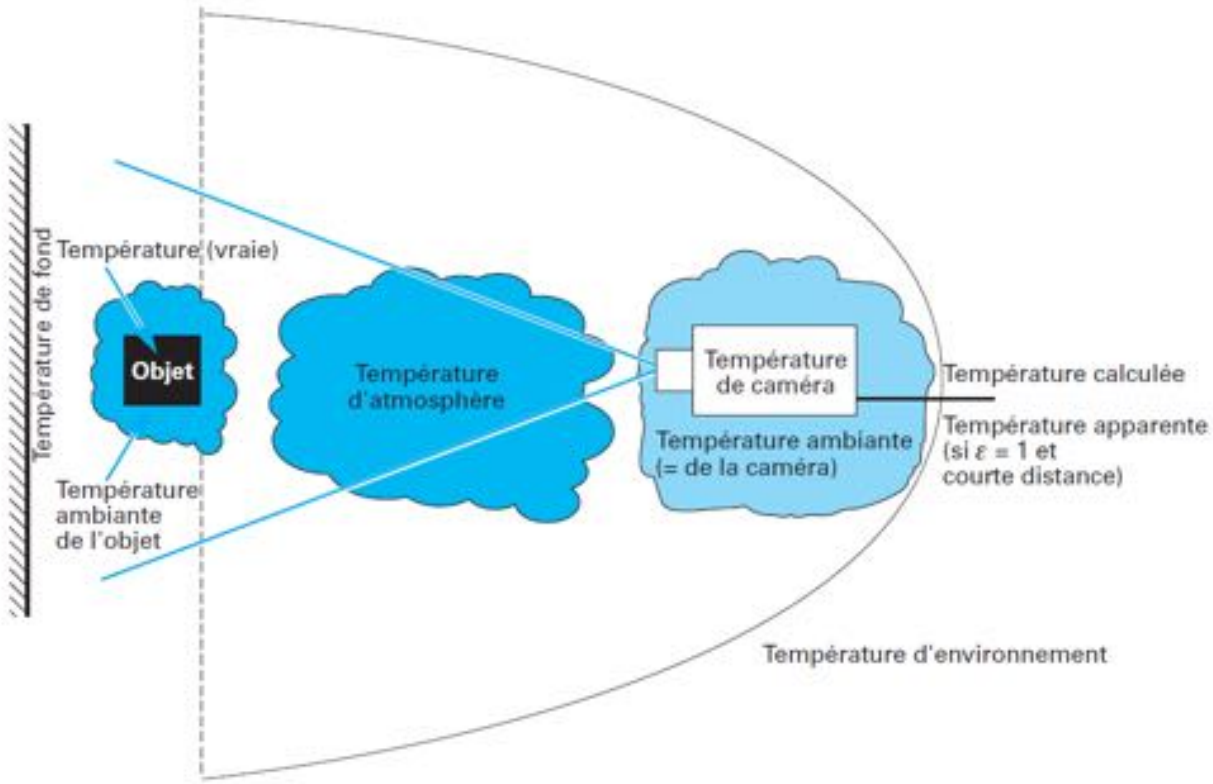
Principe de mesure de T par thermographie IR

La caméra IR mesure un flux proportionnel à la luminance, nécessité d'un étalonnage par CN.

Dans le cas d'un corps opaque, on a :

$$I_0' = \tau_{at}\varepsilon_0 I_0 + \tau_{at}(1-\varepsilon_0) I_e + (1-\tau_{at}) I_{at}$$

Luminance mesurée	Influence de l'objet	Influence de l'environnement	Influence de l'atmosphère



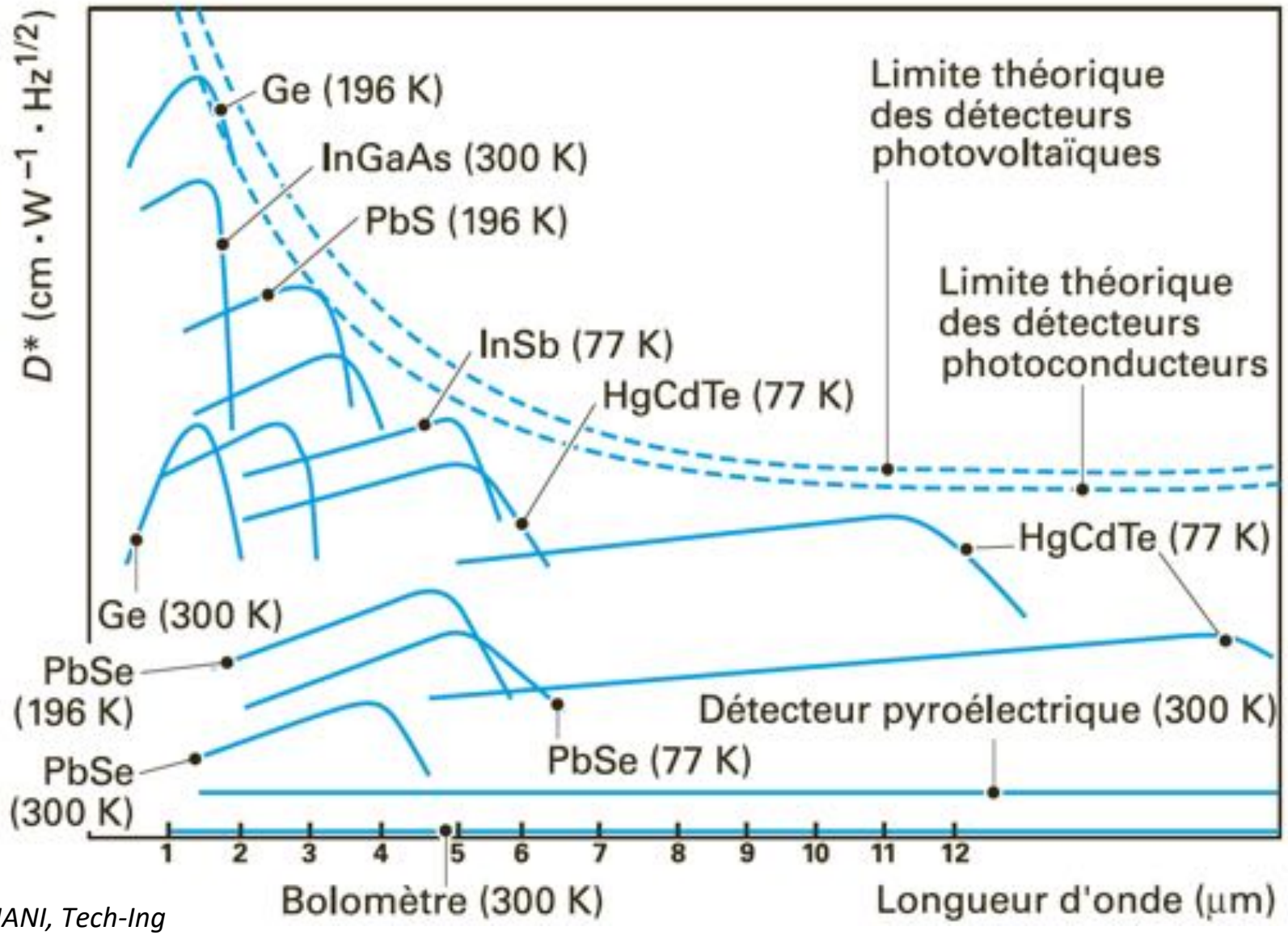
La mesure de T par caméra IR

Nécessité de connaître ε en fonction de $\lambda, T, \vec{d}$
+ Calibration par un CN ==> $I_0(T)$

Critères de choix de la caméra IR



Choix du détecteur



Evaluation fin de cours

