6ème école d'automne du GdR

Mesurer, Comprendre et Modéliser le Comportement Multiphysique des Matériaux Bio et Géosourcés

GdR MBGS
MATÉRIAUX de CONSTRUCTION
BIO et GÉO SOURCÉS



Méthodes d'homogénéisation pour la modélisation multi-échelle des matériaux

François Bignonnet

12 au 15 octobre 2026 à Pornichet

GeM Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique
Nantes Université
CENTRALE NANTES
cnrs

Méthodes d'homogénéisation pour la modélisation multi-échelle des matériaux

Ecole d'automne du GDR MBGS

François Bignonnet

Nantes Université, GeM

13 octobre 2026

Plan

Matériaux bio- et géo-sourcés à différentes échelles

Principes de l'homogénéisation
- Rappels et notations
- Principe de séparation des échelles
- Localisation et homogénéisation

Homogénéisation en champ complet
- Construction d'un volume élémentaire
- Méthodes numériques
- Contrôle de l'erreur de discrétisation et de la représentativité

Homogénéisation en champ moyen
- Moyennes intrinsèques par phase
- Problème d'inhomogénéité d'Eshelby
- Schémas d'homogénéisations classiques

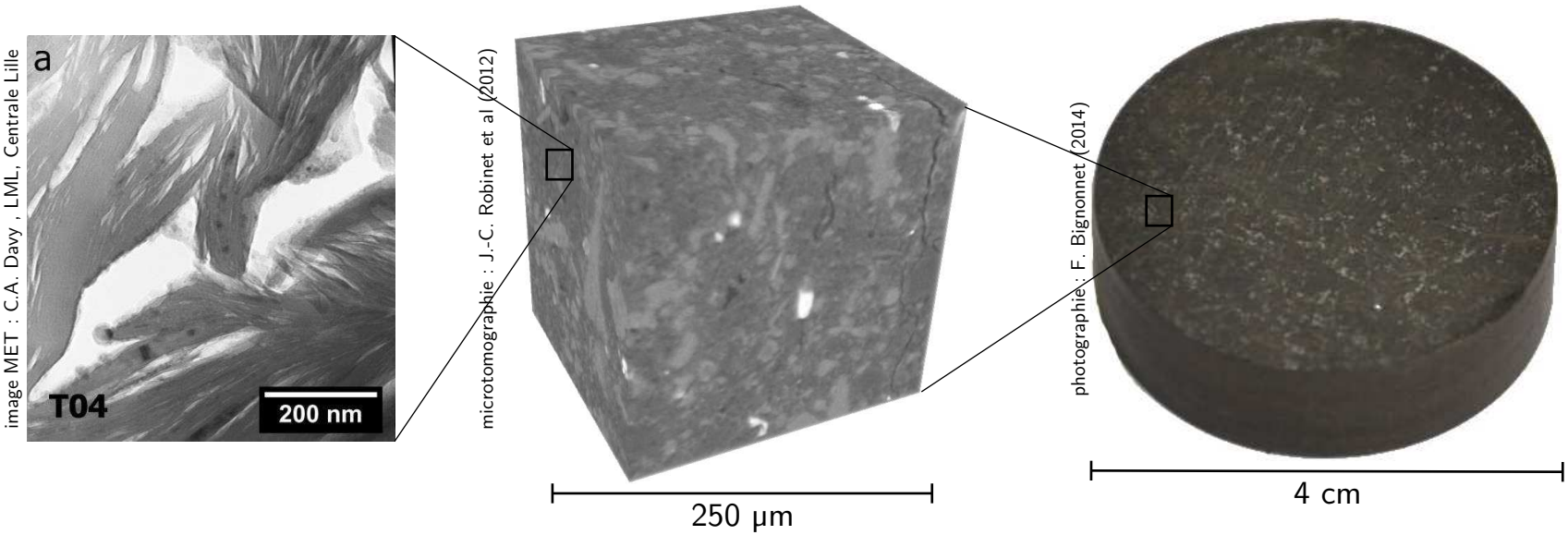
Matériaux bio- et géo-sourcés à différentes échelles

Principes de l'homogénéisation
- Rappels et notations
- Principe de séparation des échelles
- Localisation et homogénéisation

Homogénéisation en champ complet
- Construction d'un volume élémentaire
- Méthodes numériques
- Contrôle de l'erreur de discrétisation et de la représentativité

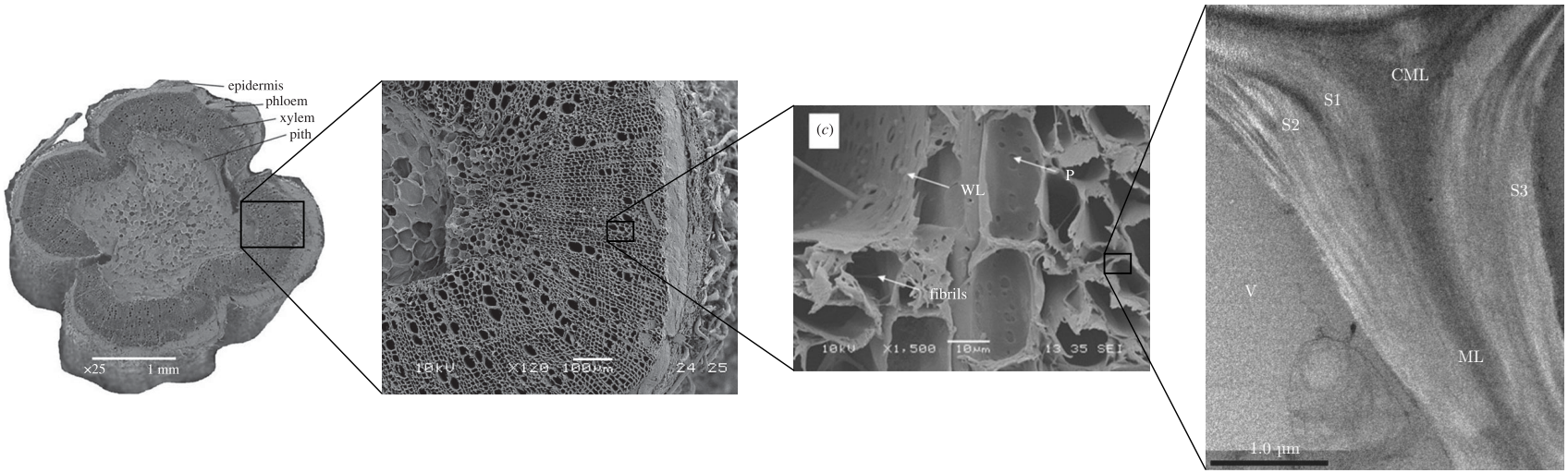
Homogénéisation en champ moyen
- Moyennes intrinsèques par phase
- Problème d'inhomogénéité d'Eshelby
- Schémas d'homogénéisations classiques

Roches argileuses



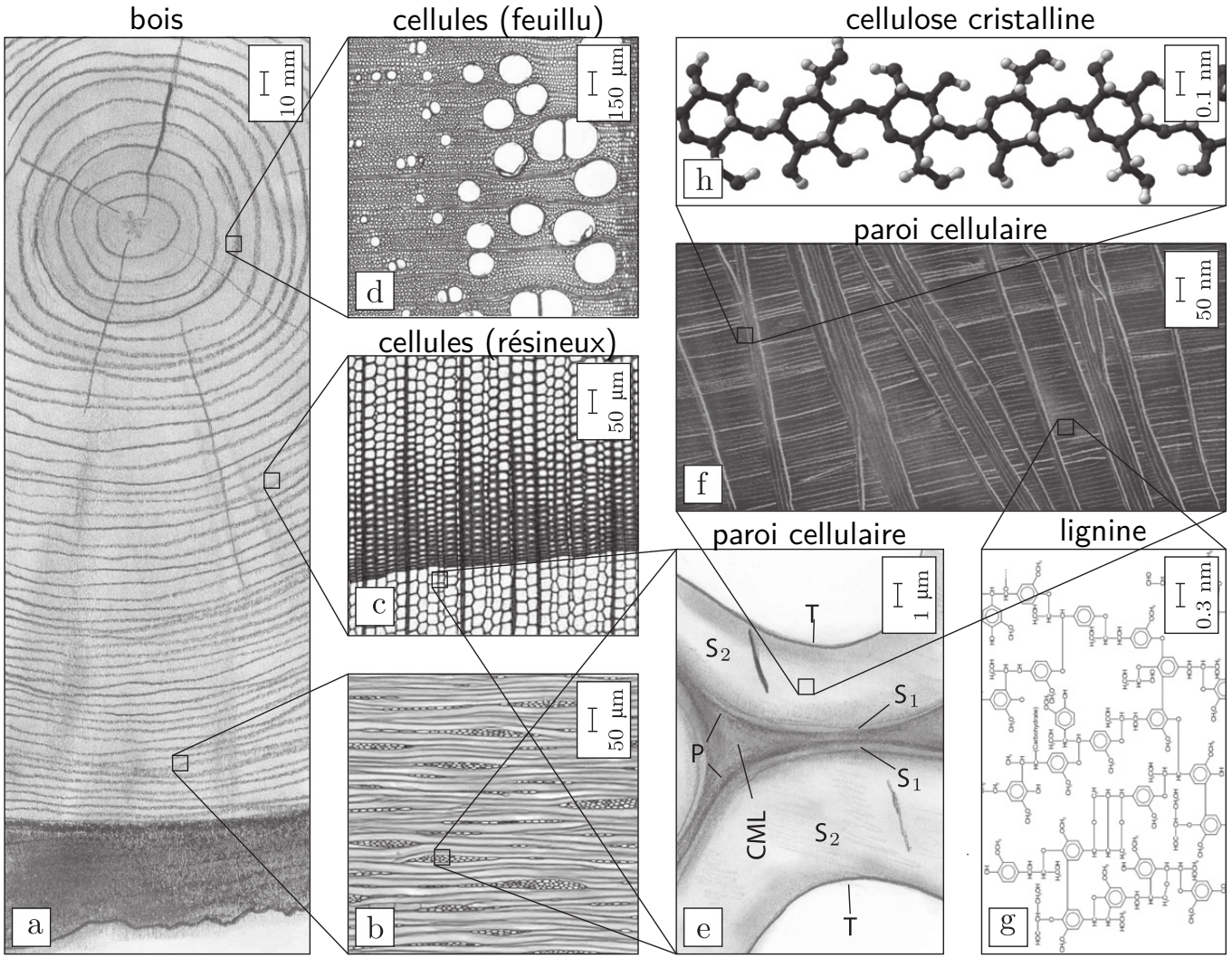
Terre crue avec ajouts végétaux : voir poster Cassandre Billon

Chanvre



Y. Jiang, M. Lawrence, M. P. Ansell, A. Hussain. Cell wall microstructure, pore size distribution and absolute density of hemp shiv. R. Soc. Open Sci. 2018 5 (4) 171945

Bois



J. Eitelberger, K. Hofstetter. Prediction of transport properties of wood below the fiber saturation point - A multiscale homogenization approach and its experimental validation. Composites Science and Technology 2011 71 (2) 34-144

Matériaux bio- et géo-sourcés à différentes échelles

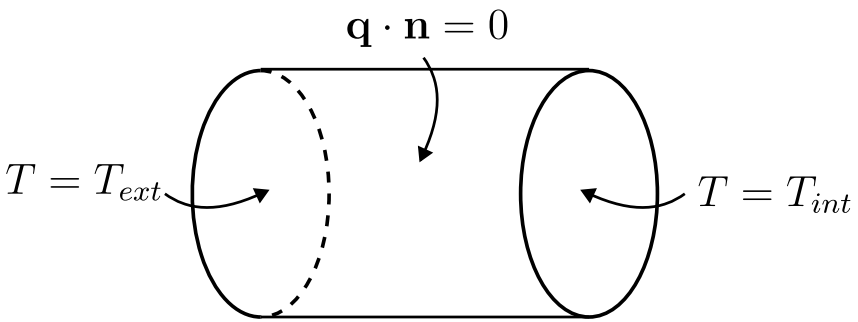
Principes de l'homogénéisation
- Rappels et notations
- Principe de séparation des échelles
- Localisation et homogénéisation

Homogénéisation en champ complet
- Construction d'un volume élémentaire
- Méthodes numériques
- Contrôle de l'erreur de discrétisation et de la représentativité

Homogénéisation en champ moyen
- Moyennes intrinsèques par phase
- Problème d'inhomogénéité d'Eshelby
- Schémas d'homogénéisations classiques

Conduction thermique en régime permanent

Domaine Ω



Variables

- T température [K]
- $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\nabla} T$ gradient de température [K/m]
- $\boldsymbol{q}$ flux thermique [W/m^2]

Propriété matérielle

- $\boldsymbol{\lambda}$ conductivité thermique [W/m.K]

Conduction en régime permanent

sans terme source

Problème aux limites :

- conservation de l'énergie

$$\operatorname{div} \boldsymbol{q} = 0 \qquad (\Omega)$$

- loi de comportement (Fourier)

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{g} \qquad (\Omega)$$

- conditions aux limites de Dirichlet

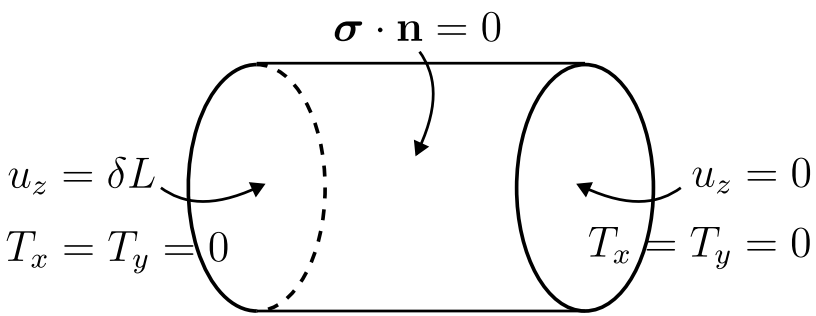
$$T = T^{\text{donné}} \qquad (\partial\Omega_D)$$

- conditions aux limites de Neumann

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = \phi^{\text{donné}} \qquad (\partial\Omega_N)$$

Élasticité linéaire en statique

Domaine Ω



Variables

- $\boldsymbol{u}$ déplacement [m]
- $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nabla}^{\text{sym}} \boldsymbol{u}$ déformation [–]
- $\boldsymbol{\sigma}$ contrainte [N/m^2]

Propriété matérielle

- $\mathbb{C}$ raideur [N/m^2]

Élasticité linéaire en statique

sans forces à distance

Problème aux limites

- conservation quantité mouvement

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \qquad (\Omega)$$

- loi de comportement (Hooke)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \qquad (\Omega)$$

- conditions aux limites de Dirichlet

$$u_i = u_i^{\text{donné}} \qquad (\partial\Omega_{D_i})$$

- conditions aux limites de Neumann

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})_i = T_i^{\text{donné}} \qquad (\partial\Omega_{N_i})$$

Analogie formelle

Conduction thermique

- température T
- gradient de température $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\nabla} T$
- flux de chaleur $\boldsymbol{q}$
- conservation de l'énergie $\mathbf{div}\, \boldsymbol{q} = 0$
- conductivité thermique $\boldsymbol{\lambda}$
- loi de comportement $\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{g}$

Élasticité linéaire

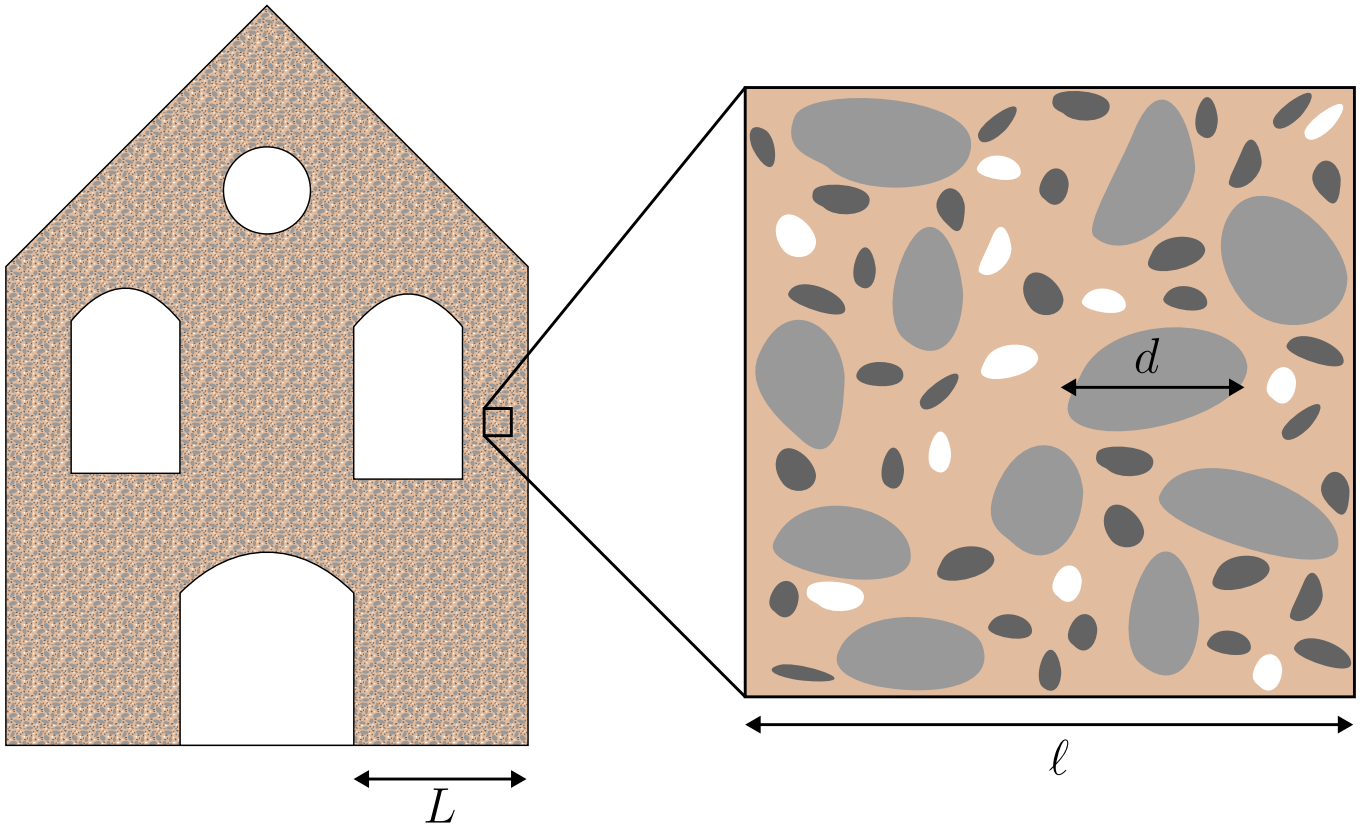
- déplacement $\boldsymbol{u}$
- déformation $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{sym}}\, \boldsymbol{u}$
- contrainte $\boldsymbol{\sigma}$
- équilibre $\mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma} = 0$
- raideur $\mathbb{C}$
- loi de comportement $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}$

Autres analogies :
diffusion, conduction électrique, permittivité, permeabilité (Darcy $\rightarrow$ Darcy),...

Cas particulier :
homogénéisation de la perméabilité depuis l'écoulement de Stokes dans les pores $\rightarrow$ changement de type de loi

- échelle microscopique : équations de Stokes
- échelle macroscopique : équations de Darcy

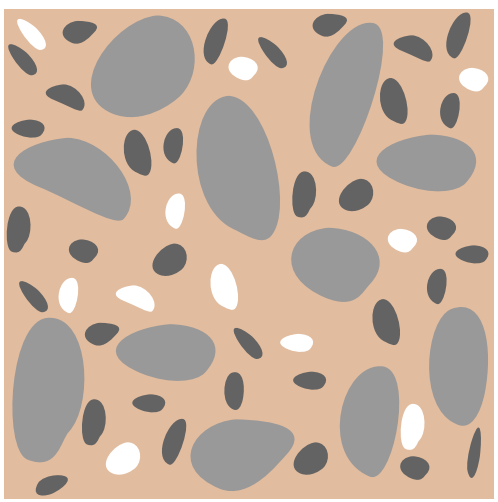
Principe de séparation des échelles

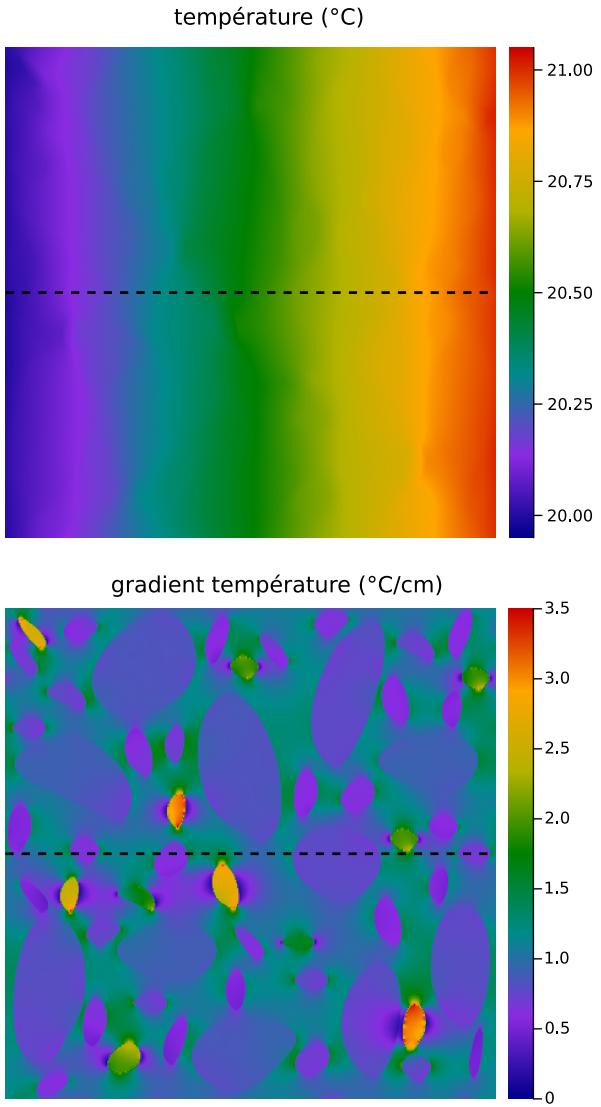


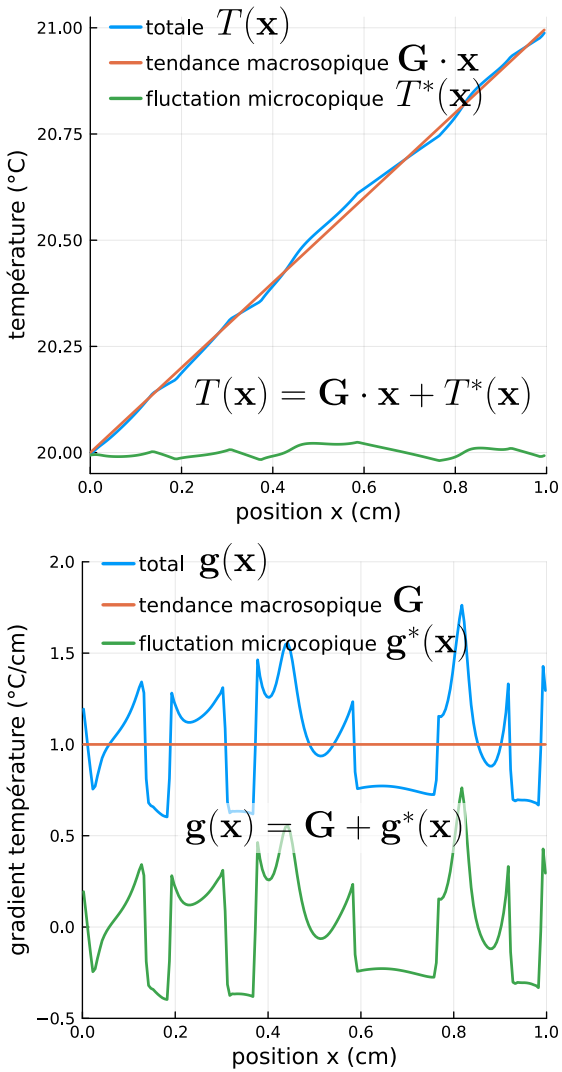
$$d \ll \ell \ll L$$

- $\ell \ll L$: la représentation est continue à l'échelle macroscopique
- $d \ll \ell$: le volume élémentaire est représentatif du matériau

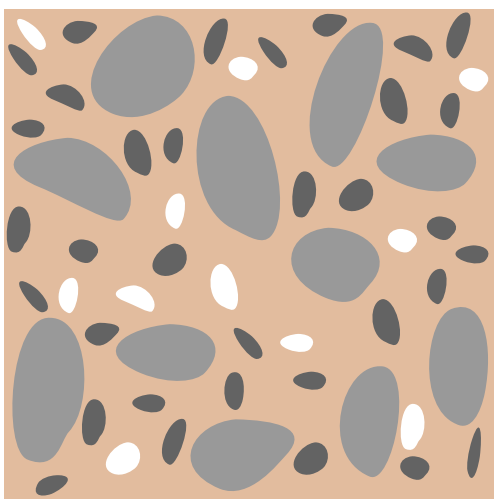
Fluctuation des champs : conduction thermique



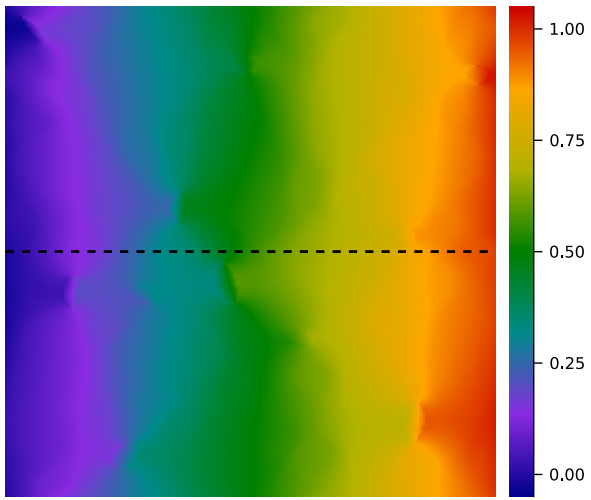




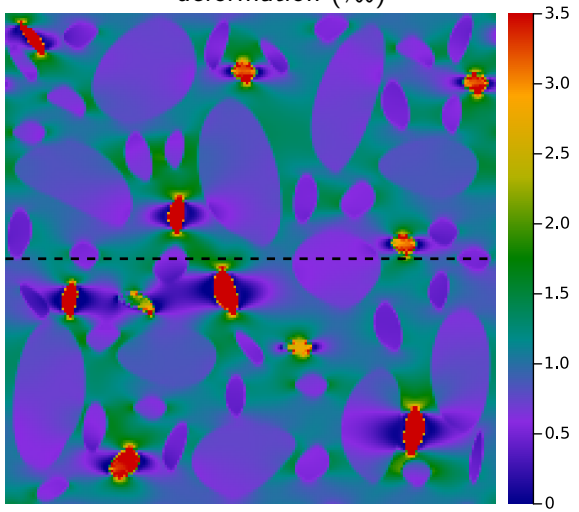
Fluctuation des champs : élasticité linéaire

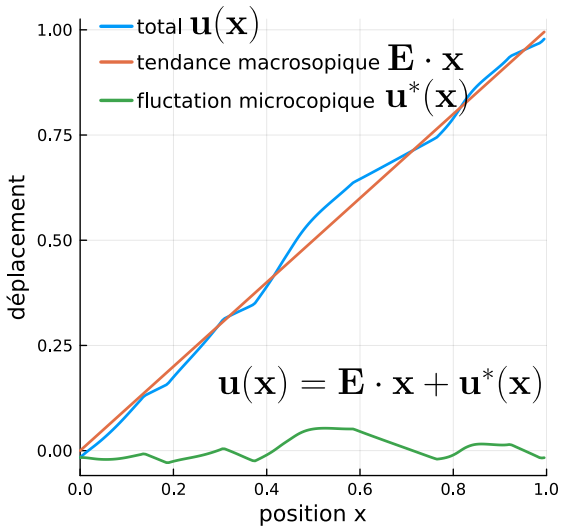


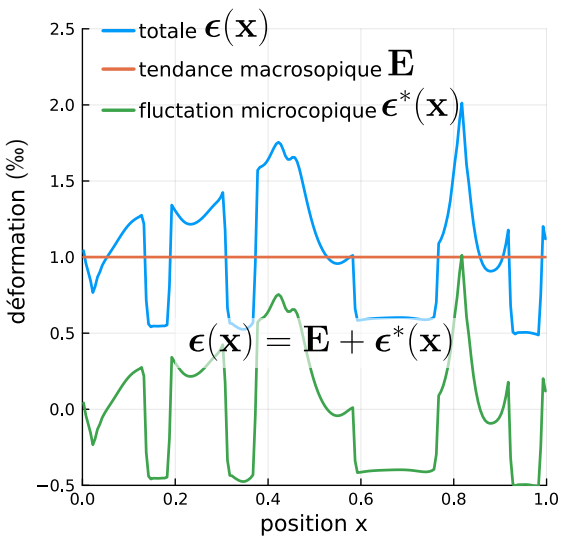
déplacement



déformation (‰)

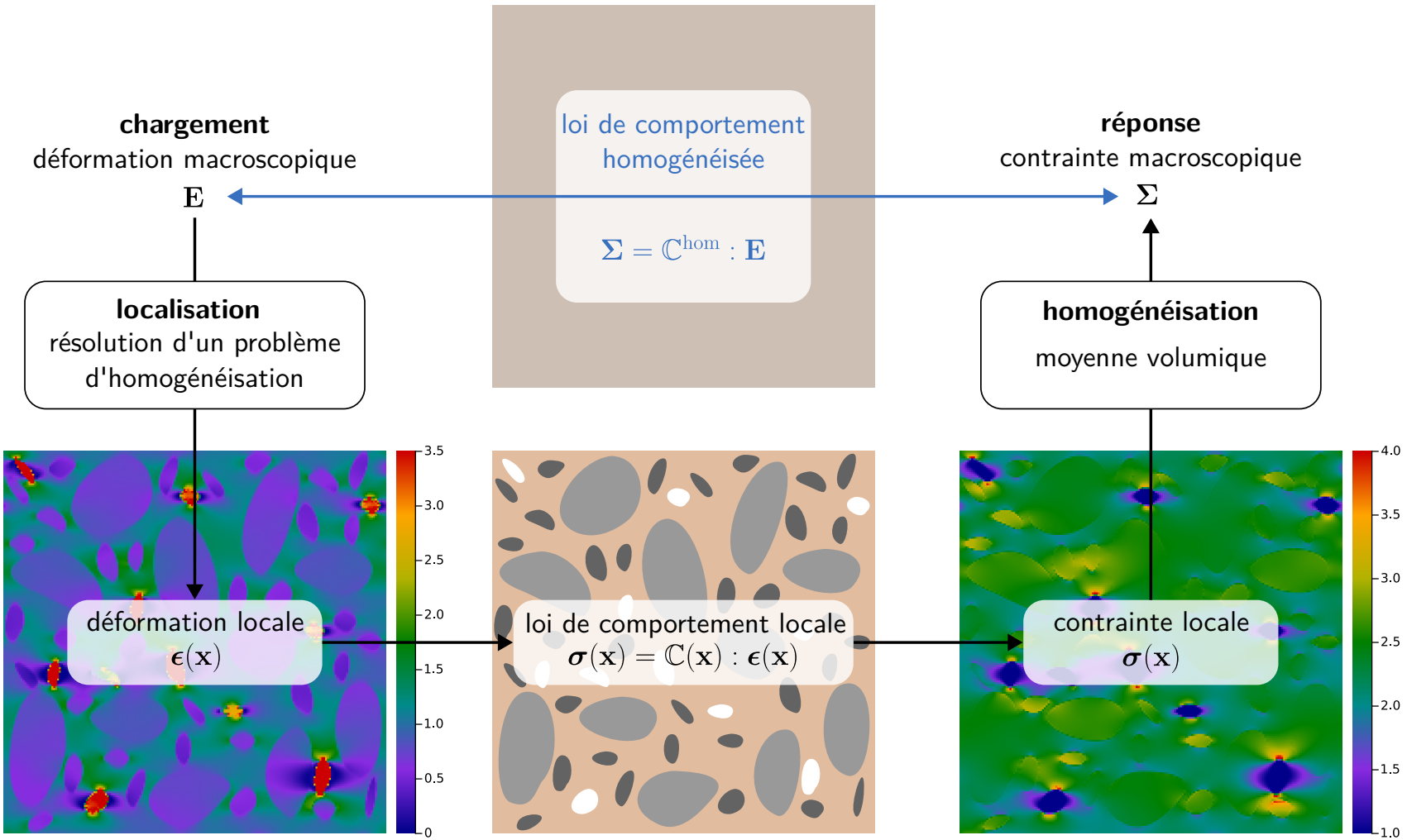






Localisation et homogénéisation

Objectif : déterminer la loi de comportement macroscopique

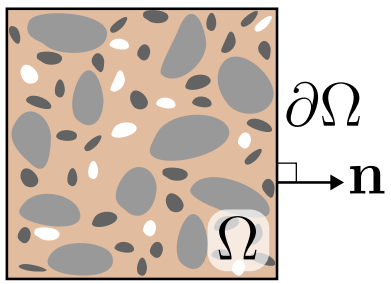


Définition du problème d'homogénéisation

Équations de champs dans Ω

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nabla}^{\text{sym}}\, \boldsymbol{u} & \text{gradient} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} & \text{comportement} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 & \text{conservation} \end{cases}$$

Volume élémentaire représentatif Ω



Conditions aux limites sur $\partial\Omega$
trois choix classiques :

KUBC (Dirichlet) $\quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x}$

SUBC (Neumann) $\quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{n}$

PBC (périodique)
$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^* := \boldsymbol{u} - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x} & \text{périodique} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} & \text{anti-périodique} \end{cases}$$

Règles de moyenne et condition de Hill–Mandel

$$\overline{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{E}$$
$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\Sigma}$$
$$\overline{\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\Sigma}$$

$$\overline{\boldsymbol{\epsilon}} := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Localisation, homogénéisation et raideur homogénéisée

Problème d'homogénéisation linéaire (KUBC)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nabla}^{\text{sym}}\, \boldsymbol{u} & (\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} & (\Omega) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 & (\Omega) \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x} & (\partial\Omega) \end{cases}$$

Tenseur de localisation de la déformation

Linéarité de la réponse vis-à-vis du chargement $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{E}$$

Loi de comportement locale

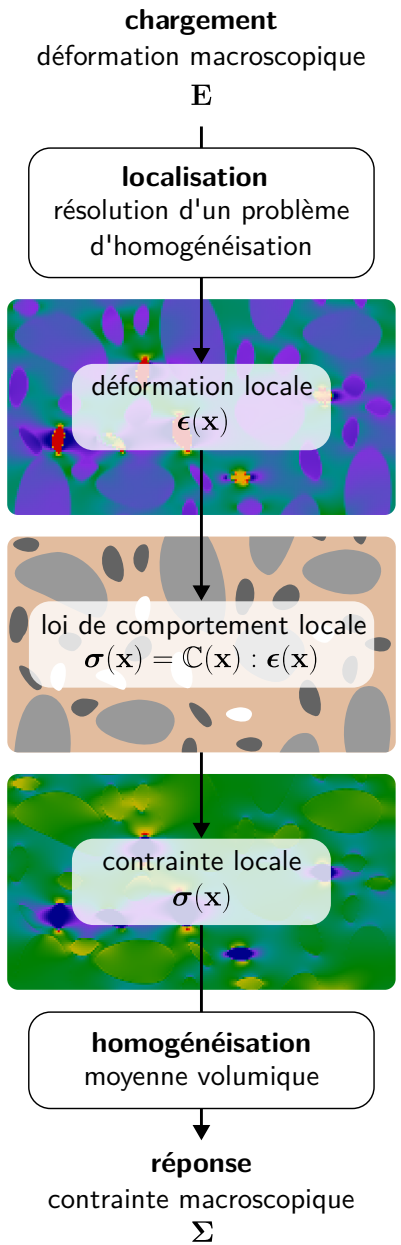
$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{C}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{C}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{A}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{E}$$

Homogénéisation

$$\boldsymbol{\Sigma} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} = \overline{\mathbb{C} : \mathbb{A} : \boldsymbol{E}} = \overline{\mathbb{C} : \mathbb{A}} : \boldsymbol{E}$$

par identification avec $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \boldsymbol{E}$

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \overline{\mathbb{C} : \mathbb{A}} \qquad = \overline{\mathbb{A}^t : \mathbb{C} : \mathbb{A}} \text{ (Hill–Mandel)}$$



Calcul des propriétés homogénéisées

Homogénéisation en champ complet

méthodes numériques

Avantages

- microstructure explicite
- champs accessibles en tout point
- localisation des champs capturée (non-linéarités)

Inconvénients

- comment construire une microstructure fidèle ?
- gestion erreur de discrétisation et représentativité
- temps de calcul long

Homogénéisation en champ moyen

méthodes analytiques

Avantages

- description synthétique de la microstructure (fractions volumiques, formes et orientations des hétérogénéités, ...)
- temps de calcul court

Inconvénients

- limites d'applications (fractions volumiques modérées ou éloignées des seuils de percolation)
- moins de flexibilité pour représenter la microstructure
- connaissance limitée des champs (moyenne et variance par phase)

Matériaux bio- et géo-sourcés à différentes échelles

Principes de l'homogénéisation
- Rappels et notations
- Principe de séparation des échelles
- Localisation et homogénéisation

Homogénéisation en champ complet
- Construction d'un volume élémentaire
- Méthodes numériques
- Contrôle de l'erreur de discrétisation et de la représentativité

Homogénéisation en champ moyen
- Moyennes intrinsèques par phase
- Problème d'inhomogénéité d'Eshelby
- Schémas d'homogénéisations classiques

Construction d'un volume élémentaire

Imagerie 3D

- microtomographie
- FIB + SEM

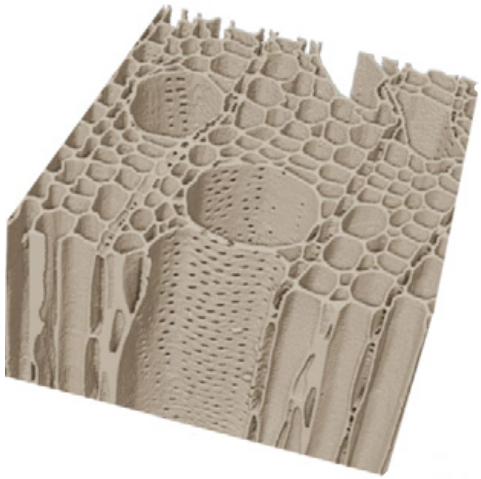
on ne peut pas voir toutes les échelles
compromis résolution – représentativité

Imagerie 2D et reconstruction

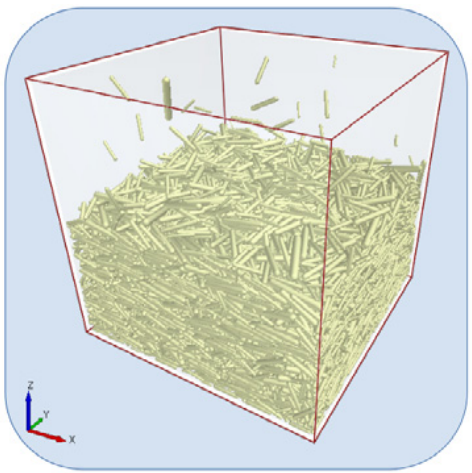
- microscopie SEM, TEM
- indicateurs statistiques : covariogramme
- reconstruction d'une microstructure 3D statistiquement équivalente par champs aléatoires

Microstructures synthétiques

- modèles de champs aléatoires
- éléments discrets
- fibres souples aléatoires



Leclerc et al. (2025) Int J Heat Mass Transf



Leclerc et al. (2026) Int J Thermal Sciences

Méthodes numériques : discrétisation et résolution

Maillage : non structuré (flexible) vs. grille régulière (rapide)

Méthodes classiques

- Méthode des éléments finis / volumes finis / différences finies
- Méthode des éléments de frontières

Méthodes accélérées par transformée de Fourier rapide (FFT)

- grille structurée (pas nécessairement uniforme)
- conditions aux limites périodiques natives (Dirichlet ou Neumann possible)
- différents types de discrétisation :
  polynômes trigonométriques, éléments finis, différences finies
- solveurs linéaires ou non-linéaires
- allers-retours dans l'espace de Fourier pour appliquer opérateur de Green :
  bon conditionnement de l'opérateur discret

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{K}_0^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}_0^{-1}\boldsymbol{f}$$

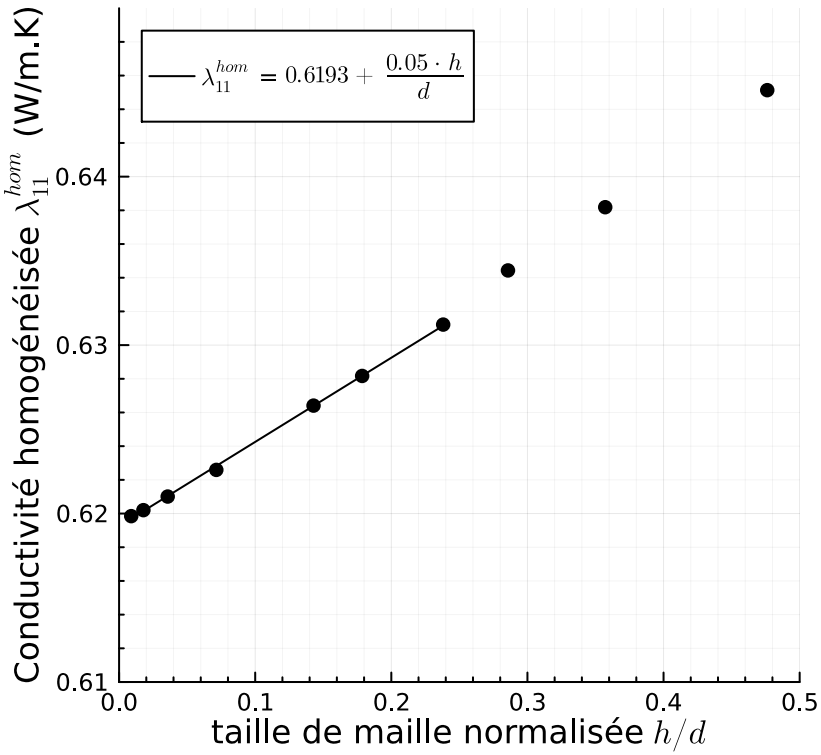
- permet de très grosses simulations ($\sim 1000^3$ éléments)

Erreur de discrétisation

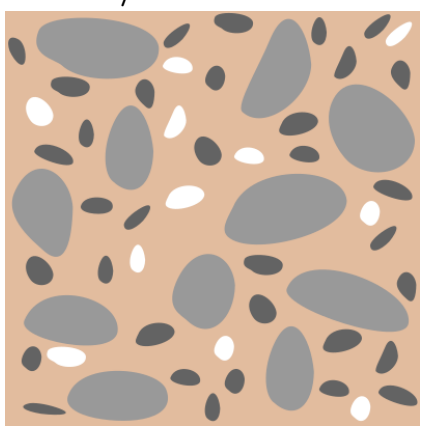
Contrôle de l'erreur de discrétisation : étude de convergence spatiale

h = taille de maille / pixel

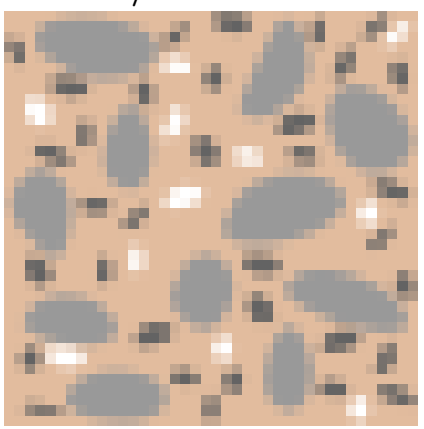
d = taille caractéristique d'une hétérogénéité



$h/d = 0.03$



$h/d = 0.3$



L'ordre ($\mathcal{O}(h), \mathcal{O}(h^2), ...$) et le taux de convergence dépendent

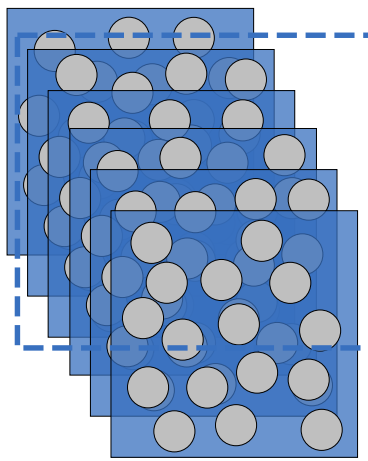
- du type de discrétisation
- de la microstructure

Représentativité : théorie de l'estimation

microstructure = random process ⇒ **homogenized conductivity λ = random variable**

population = all possible realisations

random sampling of n realisations



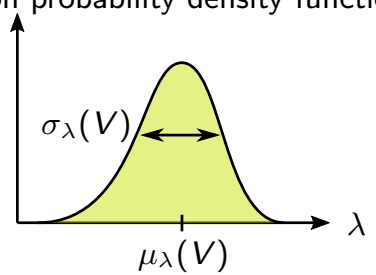
domains of finite size V

random homogenized conductivity:
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

random sample average and standard deviation

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$
$$S_\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \overline{\lambda})^2$$

population probability density function



$\mu_\lambda(V)$: average

$\sigma_\lambda(V)$: standard deviation

95% confidence interval:

$$P(\overline{\lambda} - \delta\lambda \leq \mu_\lambda(V) \leq \overline{\lambda} + \delta\lambda) = 95\%$$

where $\delta\lambda = c\dfrac{S_\lambda}{\sqrt{n}}$

$c \approx 2$

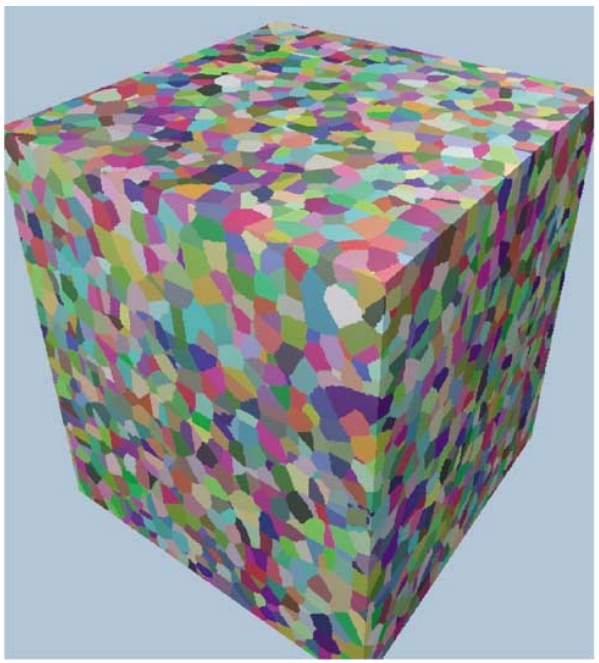
fractile of Student's distribution with $n-1$ dofs

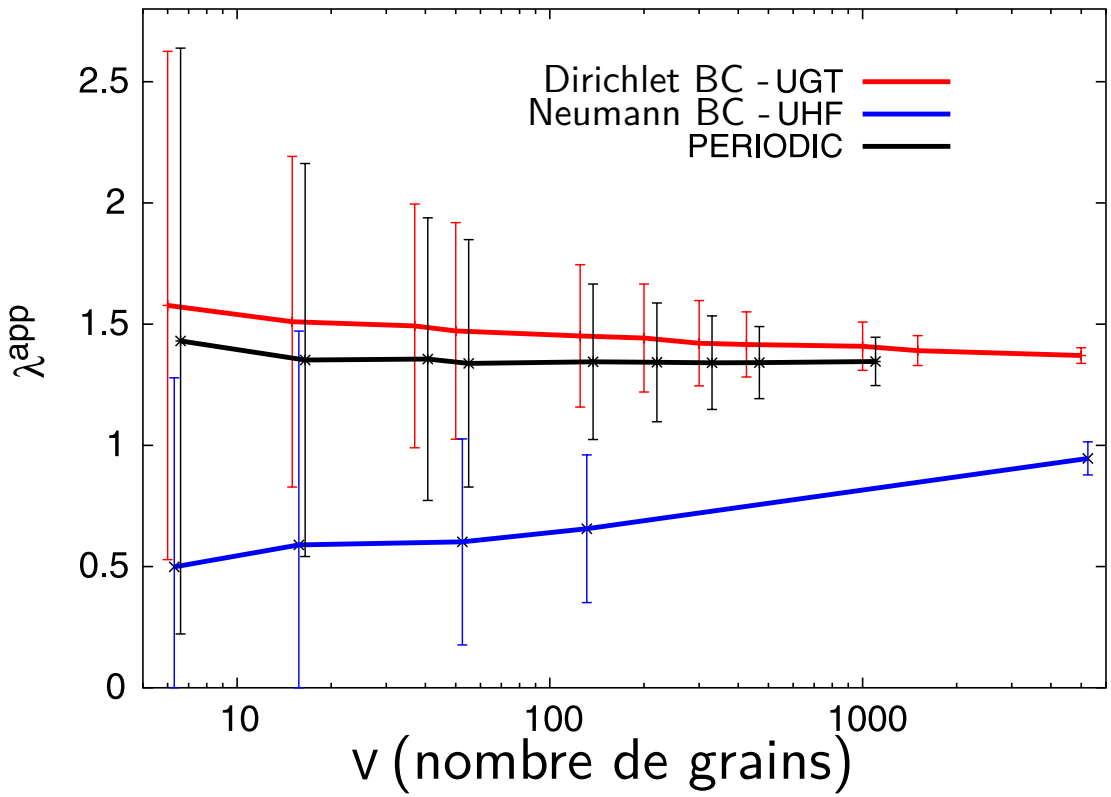
representativity relative error

$$\epsilon_{RVE} = 2\frac{S_\lambda}{\overline{\lambda}\sqrt{n}}$$

Représentativité : effet de la taille du volume élémentaire

Contrôle de la représentativité : étude de convergence statistique





T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. Int. J. Solids Structures, 40, 13–14, 2003, 3647-3679

Alternatives si un seul grand volume élémentaire :

- échantillonage de sous volumes de taille variable Abdallah et al. (2015) Transp. Porous Media
- filtrage de la réponse par fenêtres de taille variable Bignonnet (2020) Comput. Meth. Appl.

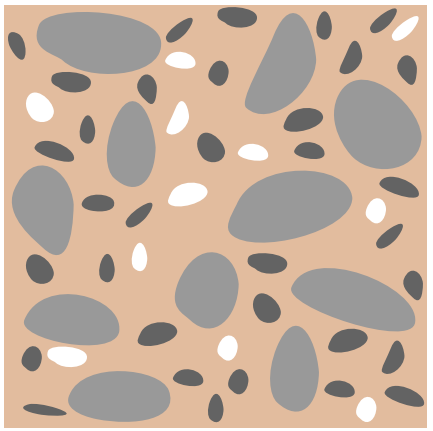
Matériaux bio- et géo-sourcés à différentes échelles

Principes de l'homogénéisation
- Rappels et notations
- Principe de séparation des échelles
- Localisation et homogénéisation

Homogénéisation en champ complet
- Construction d'un volume élémentaire
- Méthodes numériques
- Contrôle de l'erreur de discrétisation et de la représentativité

Homogénéisation en champ moyen
- Moyennes intrinsèques par phase
- Problème d'inhomogénéité d'Eshelby
- Schémas d'homogénéisations classiques

Matériau hétérogène à phases homogènes



Volume Élémentaire Représentatif Ω constitué de n phases

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cdots \cup \Omega_n$$

Propriétés matérielles homogènes par phases

$$\mathbb{C}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{C}_i \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_i$$

Fractions volumiques des phases

$$f_i = \frac{|\Omega_i|}{|\Omega|} \qquad ; \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i = 1$$

Moyenne intrinsèque par phase

$$\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^i := \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Décomposition de la moyenne volumique sur Ω

$$\overline{\boldsymbol{\epsilon}} := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^i$$

Décomposition des moyennes et raideur homogénéisée

Règles de moyenne

$$\boldsymbol{E} = \overline{\boldsymbol{\epsilon}} = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{i} \quad ; \quad \boldsymbol{\Sigma} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{i}$$

Élasticité linéaire : tenseur de localisation

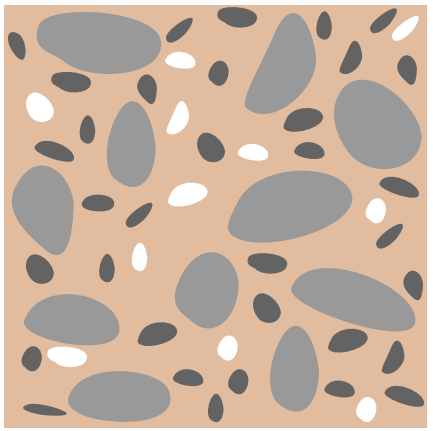
$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{C}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{C}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{A}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{E}$$

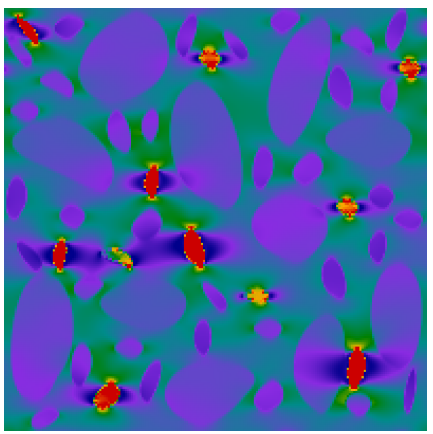
Localisation moyenne par phase

$$\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{i} = \overline{\mathbb{A}}^{i} : \boldsymbol{E}$$
$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{i} = \mathbb{C}_i : \overline{\mathbb{A}}^{i} : \boldsymbol{E}$$

Raideur homogénéisée

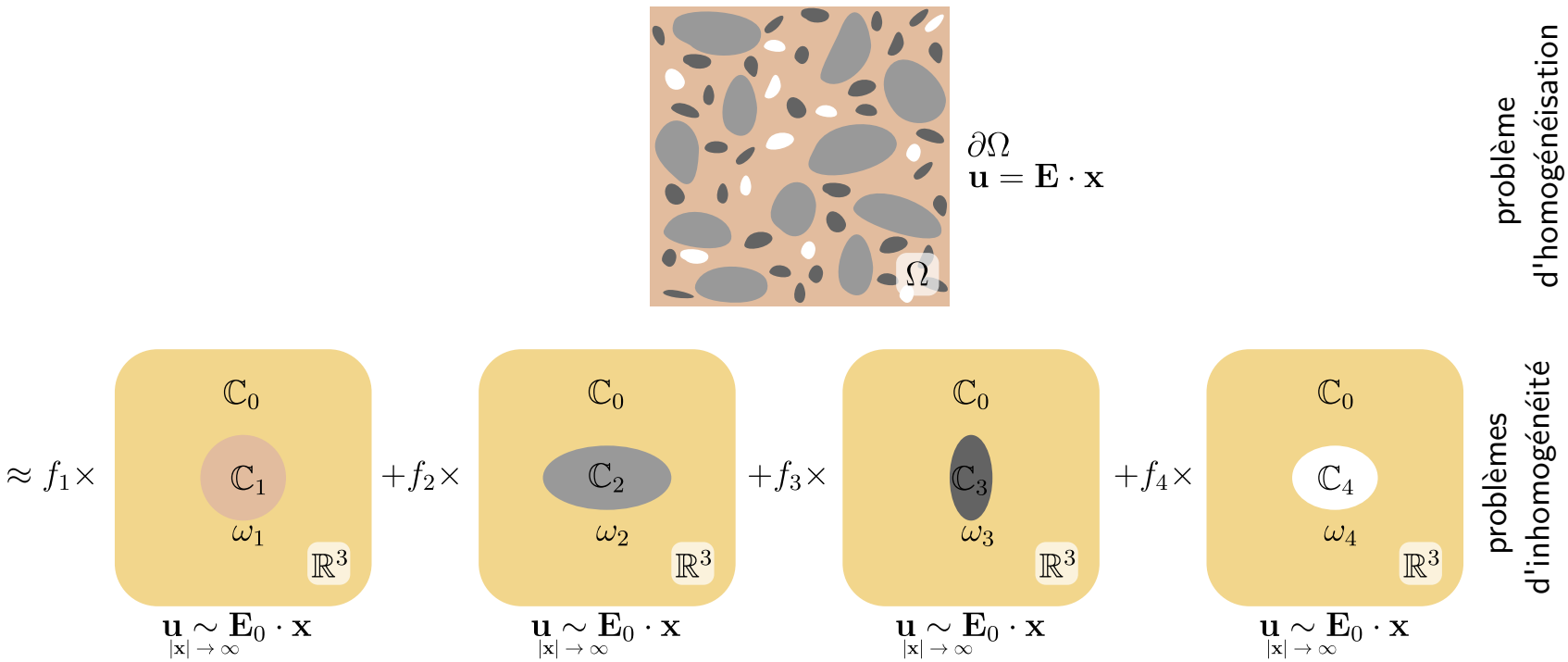
$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \overline{\mathbb{C} : \mathbb{A}} = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \mathbb{C}_i : \overline{\mathbb{A}}^{i}$$





Problèmes d'inhomogénéité d'Eshelby

Approximation de la localisation de la déformation moyenne par phase



Problème d'inhomogénéité d'Eshelby pour la phase *i*

- Inhomogénéité ω_i de raideur $\mathbb{C}_i$: motif morphologique représentatif
- Milieu de référence d'étendue infinie ($\mathbb{R}^3$) de raideur $\mathbb{C}_0$
- Déformation auxiliaire $\boldsymbol{E}_0$ uniforme à l'infini

Solution du problème d'inhomogénéité d'Eshelby

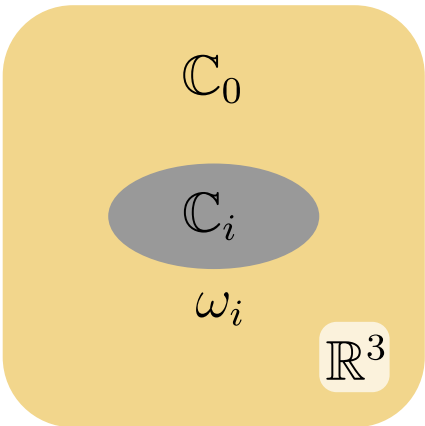
Inhomogénéité ω_i ellipsoïdale de raideur $\mathbb{C}_i$ uniforme

Déformation uniforme dans l'inhomogénéité

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}_0^i : \boldsymbol{E}_0$$

Tenseur de localisation du problème d'Eshelby

$$\mathbb{A}_0^i = \left[\mathbb{I} + \mathbb{P}_0^i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_0)\right]^{-1}$$



Le tenseur de Hill $\mathbb{P}_0^i$ dépend de

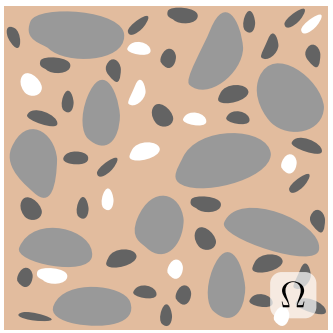
- la forme de l'inhomogénéité ω_i (rapports d'aspects), mais pas de sa taille
- la raideur $\mathbb{C}_0$ du milieu de référence

Expressions analytiques de $\mathbb{P}_0^i$ si $\mathbb{C}_0$ est isotrope ou symétries particulières sinon intégration numérique de

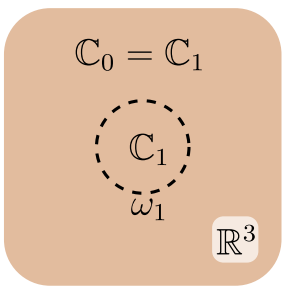
$$\mathbb{P}_0^i = \frac{|\det \boldsymbol{A}|}{4\pi} \int_{\|\boldsymbol{\eta}\|=1} \frac{\boldsymbol{\eta} \overset{\text{sym}}{\otimes} (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbb{C}_0 \cdot \boldsymbol{\eta})^{-1} \overset{\text{sym}}{\otimes} \boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\eta}\|^3} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{x} \in \omega_i \Leftrightarrow \left\|\boldsymbol{A}^{-T} \cdot \boldsymbol{x}\right\| \leq 1$$

Estimation de Mori–Tanaka

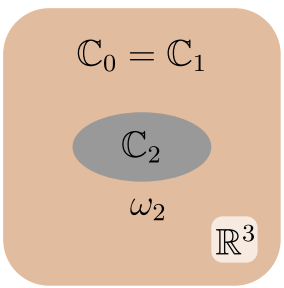
- phase 1 : matrice continue
- phases $i \geq 2$: inclusions, $\sum_{i=2}^{n} f_i$ modéré (dépend des rapports d'aspects)



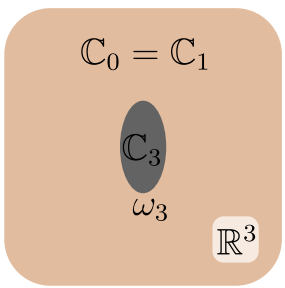
problème d'homogénéisation

$\approx f_1 \times$ 

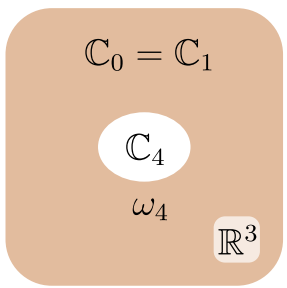
$\mathbf{u} \underset{|\mathbf{x}| \to \infty}{\sim} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}$

$+ f_2 \times$ 

$\mathbf{u} \underset{|\mathbf{x}| \to \infty}{\sim} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}$

$+ f_3 \times$ 

$\mathbf{u} \underset{|\mathbf{x}| \to \infty}{\sim} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}$

$+ f_4 \times$ 

$\mathbf{u} \underset{|\mathbf{x}| \to \infty}{\sim} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}$

problèmes d'inhomogénéité

approximation $\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^i \approx \mathbb{A}_1^i : \boldsymbol{E}_0$

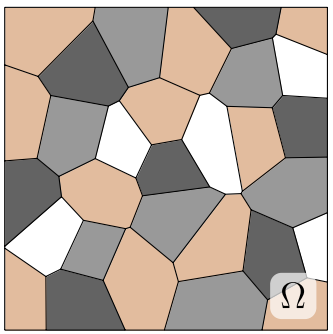
$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} f_i \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^i \approx \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \mathbb{A}_1^i \right) : \boldsymbol{E}_0$

$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} f_i \overline{\boldsymbol{\sigma}}^i \approx \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_1^i \right) : \boldsymbol{E}_0$

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} \approx \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_1^i \right) : \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \mathbb{A}_1^i \right)^{-1}$$

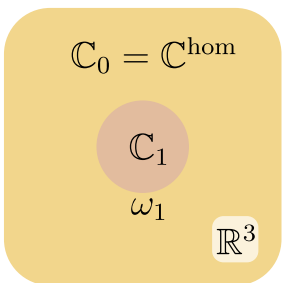
Estimation auto-cohérente

- pas de phase matrice
- connectivité dépendante des fractions volumiques

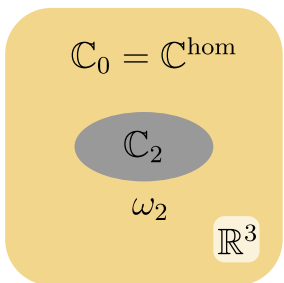


$\partial\Omega$
$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}$

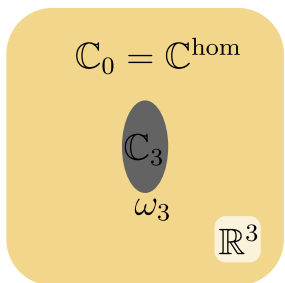
problème d'homogénéisation

$\approx f_1 \times$ 

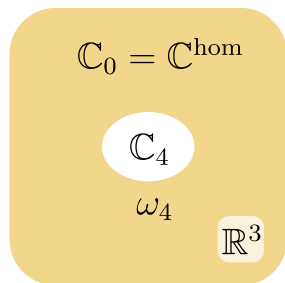
$\mathbf{u} \underset{|\mathbf{x}| \to \infty}{\sim} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}$

$+f_2 \times$ 

$\mathbf{u} \underset{|\mathbf{x}| \to \infty}{\sim} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}$

$+f_3 \times$ 

$\mathbf{u} \underset{|\mathbf{x}| \to \infty}{\sim} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}$

$+f_4 \times$ 

$\mathbf{u} \underset{|\mathbf{x}| \to \infty}{\sim} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}$

problèmes d'inhomogénéité

approximation $\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^i \approx \mathbb{A}^i_{\text{hom}} : \boldsymbol{E}_0$

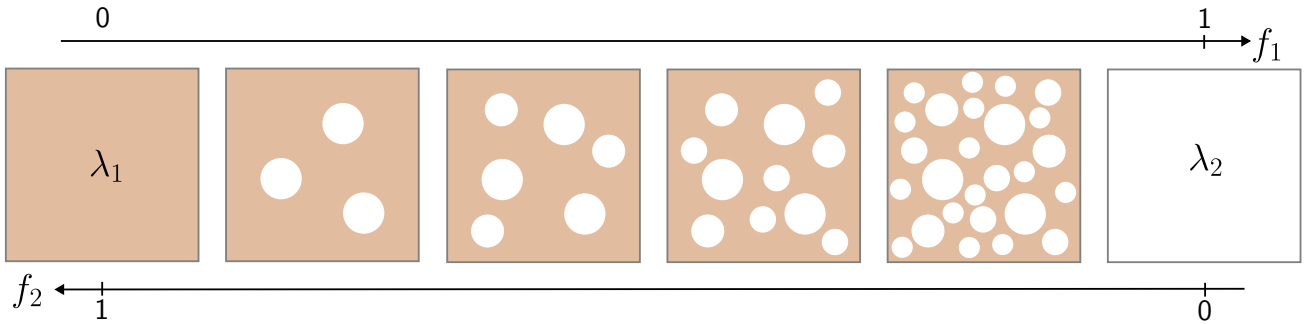
$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^n f_i \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^i \approx \left(\sum_{i=1}^n f_i \mathbb{A}^i_{\text{hom}} \right) : \boldsymbol{E}_0$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^n f_i \overline{\boldsymbol{\sigma}}^i \approx \left(\sum_{i=1}^n f_i \mathbb{C}_i : \mathbb{A}^i_{\text{hom}} \right) : \boldsymbol{E}_0$$

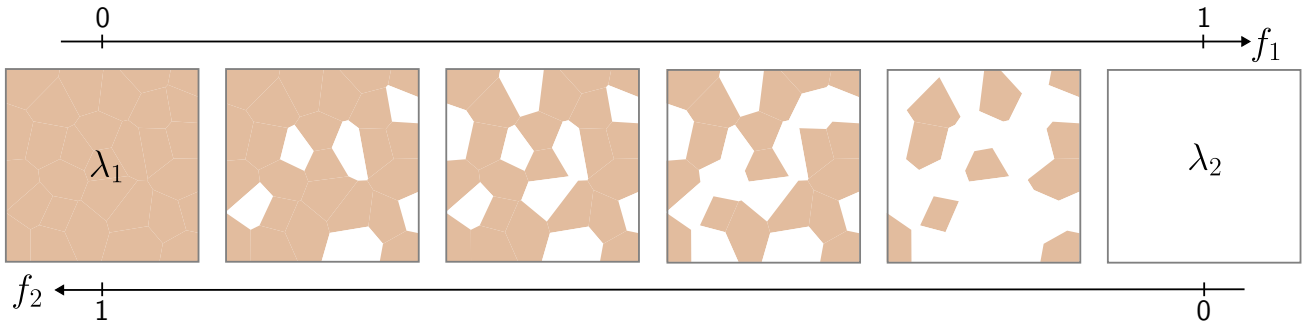
$$\mathbb{C}^{\text{hom}} \approx \left(\sum_{i=1}^n f_i \mathbb{C}_i : \mathbb{A}^i_{\text{hom}} \right) : \left(\sum_{i=1}^n f_i \mathbb{A}^i_{\text{hom}} \right)^{-1}$$

Choix du schéma et représentation de la microstructure

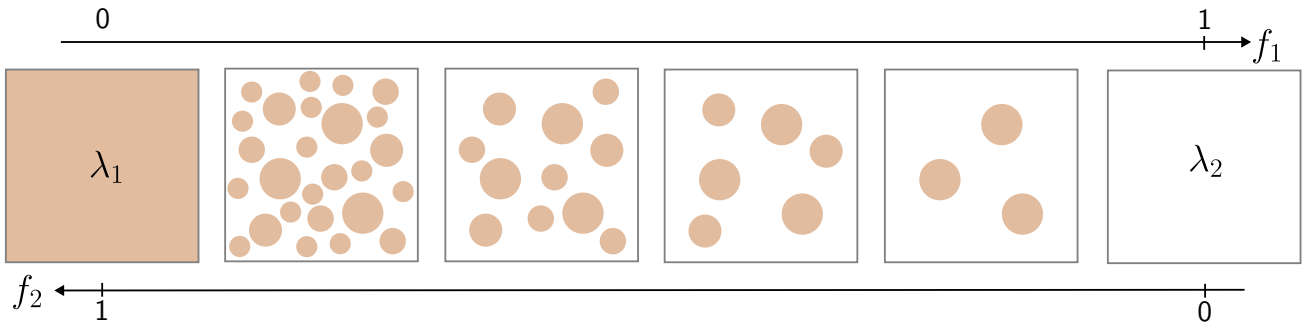
Mori–Tanaka Matrice : phase 1



Auto-cohérent Connectivité des phases dépend de la fraction volumique



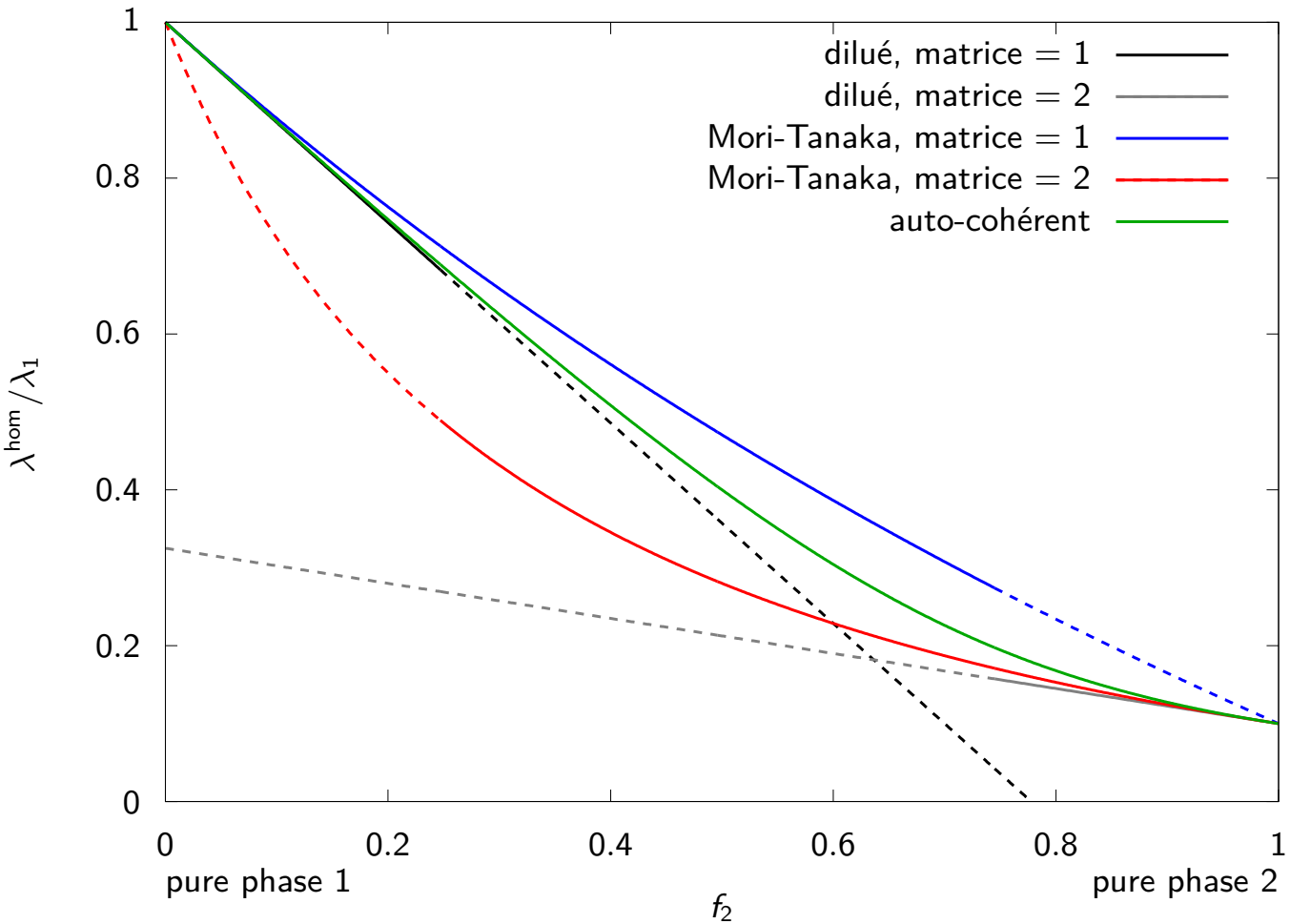
Mori–Tanaka Matrice : phase 2



Choix du schéma et propriété homogénéisée

matériau biphasique avec conductivité locale isotrope, inclusions sphériques

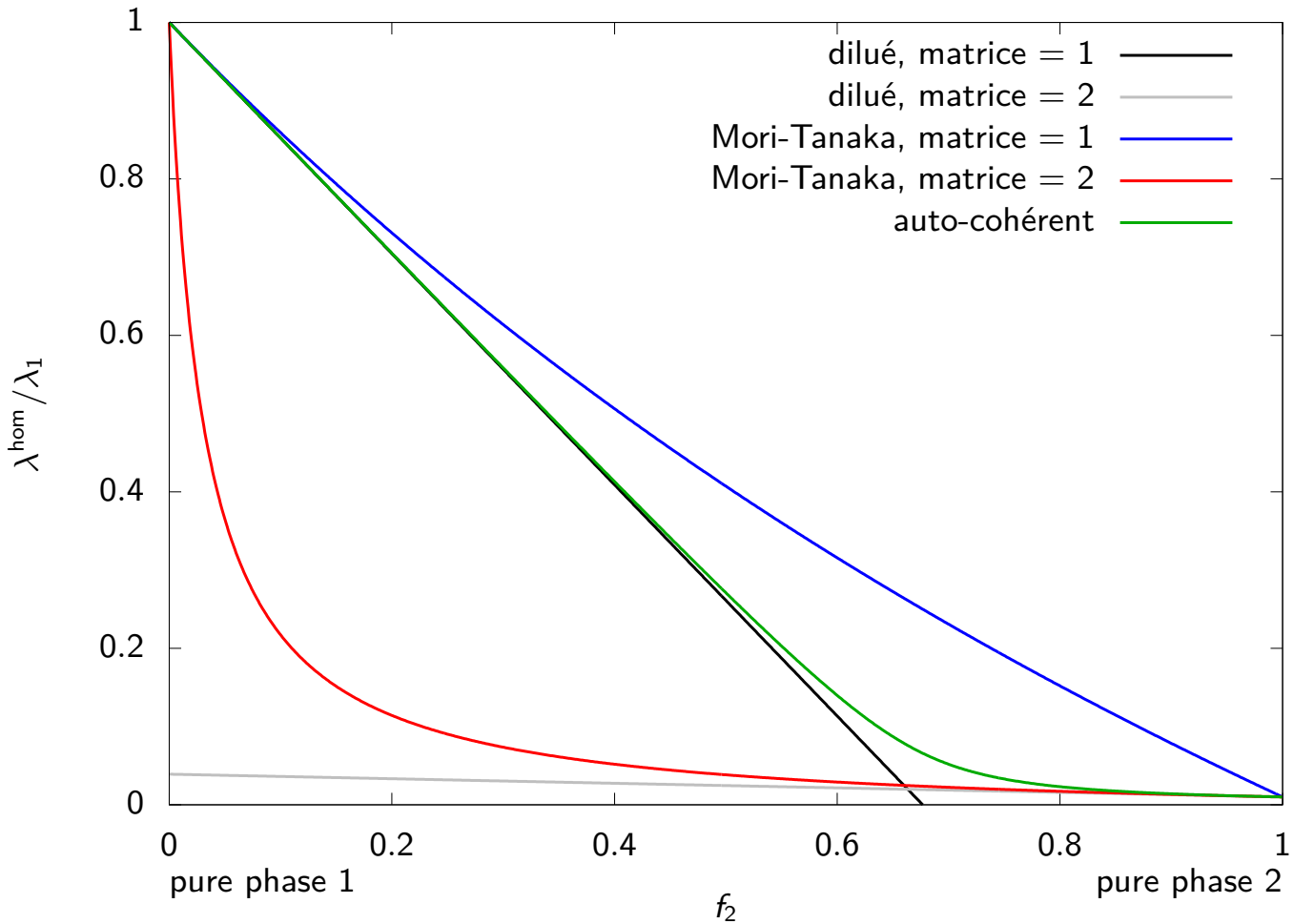
$\lambda_2/\lambda_1 = 0.1$



Choix du schéma et propriété homogénéisée

matériau biphasique avec conductivité locale isotrope, inclusions sphériques

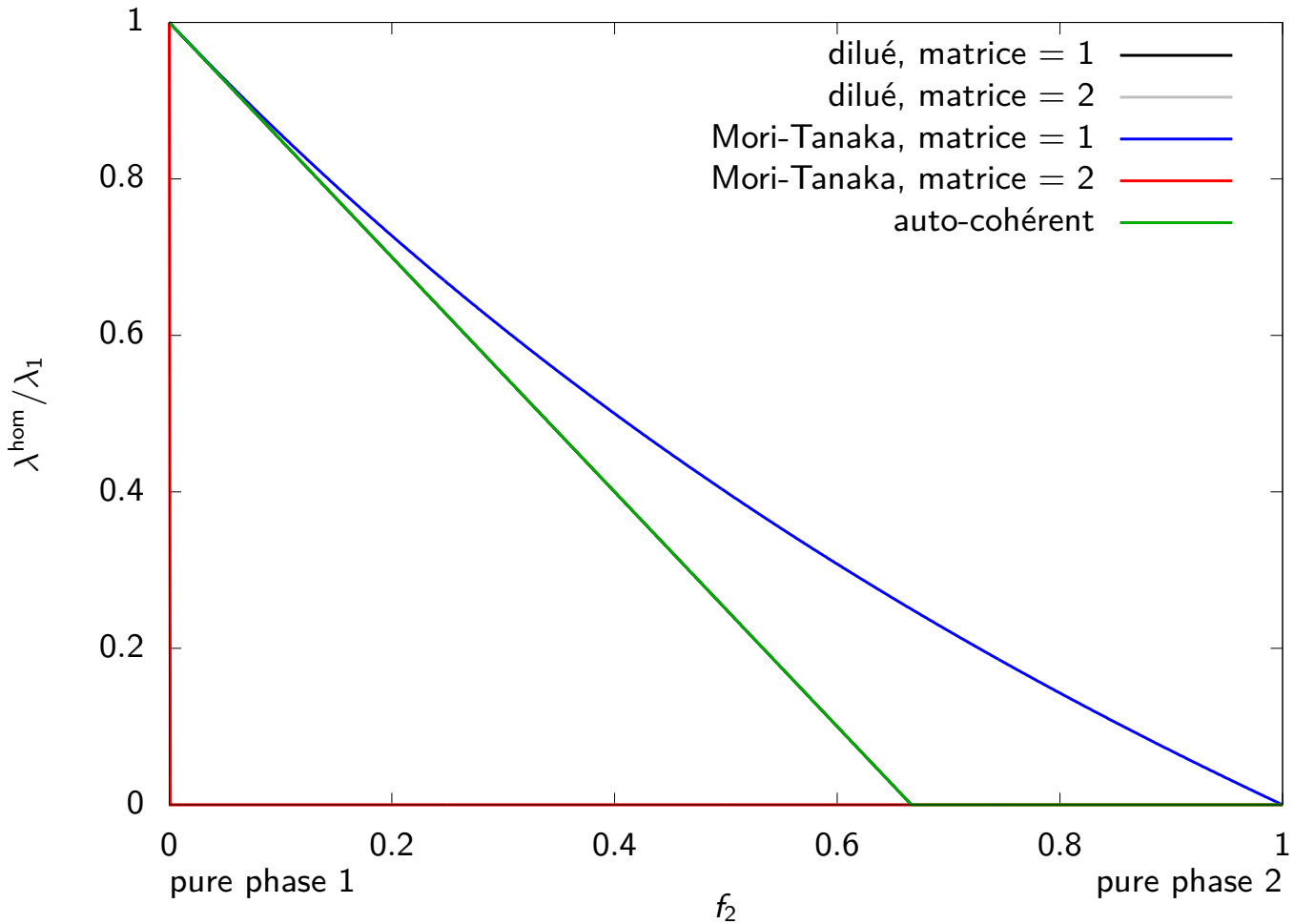
$$\lambda_2/\lambda_1 = 0.01$$



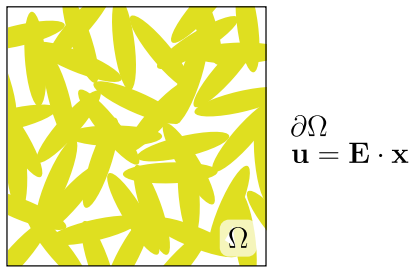
Choix du schéma et propriété homogénéisée

matériau biphasique avec conductivité locale isotrope, inclusions sphériques

$\lambda_2/\lambda_1 \to 0$



Exemple d'application : panneau de fibres

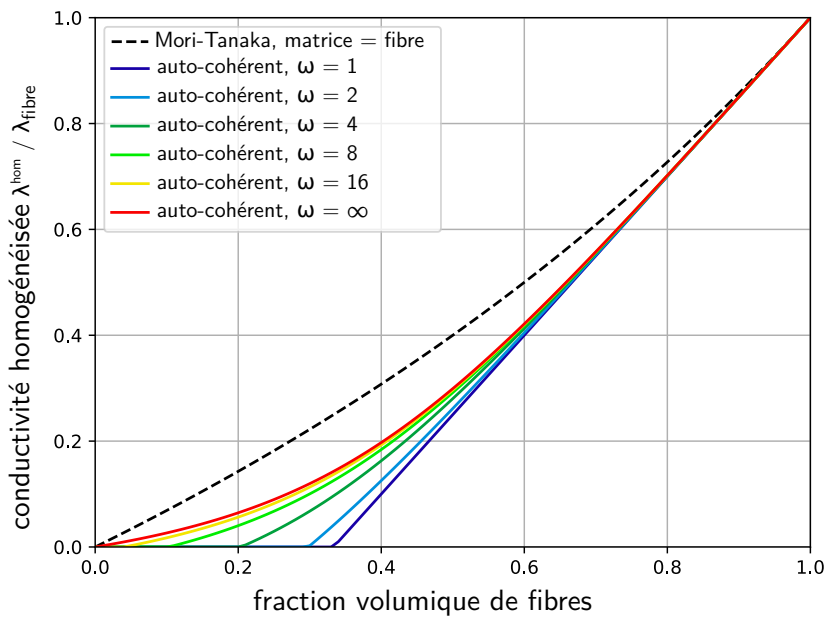


$$\approx f_1 \times \underset{\mathbf{u} \underset{|\mathbf{x}| \to \infty}{\sim} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}}{\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}^{\text{hom}},\ \mathbb{C}_1,\ \omega_1,\ \mathbb{R}^3} + f_2 \times \underset{\mathbf{u} \underset{|\mathbf{x}| \to \infty}{\sim} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}}{\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}^{\text{hom}},\ \mathbb{C}_2,\ \omega_2,\ \mathbb{R}^3} + f_3 \times \underset{\mathbf{u} \underset{|\mathbf{x}| \to \infty}{\sim} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}}{\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}^{\text{hom}},\ \mathbb{C}_2,\ \omega_3,\ \mathbb{R}^3} + f_4 \times \underset{\mathbf{u} \underset{|\mathbf{x}| \to \infty}{\sim} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x}}{\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}^{\text{hom}},\ \mathbb{C}_2,\ \omega_4,\ \mathbb{R}^3} + \dots$$

Phases

- air
  $\lambda = 0$ pour illustrer
  sphérique
- fibres conductives
  sphéroïdes allongés
  rapport d'aspect ω
  distribution d'orientation isotrope

Schéma auto-cohérent



Pour aller plus loin

Autres schémas d'homogénéisation

- schéma de Maxwell [Sevostianov & Giraud (2013) Int J Eng Sciences]
- schéma différentiel [Norris (1985) Mech Materials]
- schéma interaction direct derivative (IDD) [Zheng & Du (2001) J Mech Phys Solids]

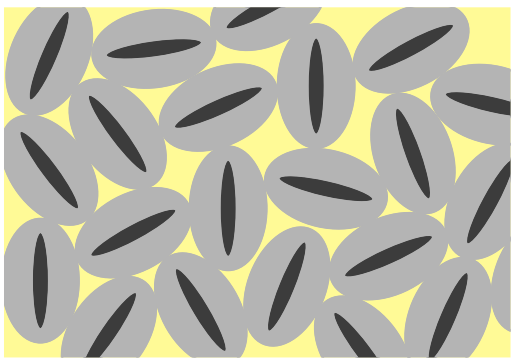
Problèmes d'Eshelby généralisés

avec inhomogénéités composites

[Hashin (1991) J Appl Mech]

[Hervé & Zaoui (1993) Int J Engng Sci]

[Barthélémy & Bignonnet (2020) Int J Engng Sci]



Bornes sur les propriétés homogénéisées

- Bornes de Voigt–Reuss (en conductivité : bornes de Wiener)

$$\left(\overline{\mathbb{C}^{-1}}\right)^{-1} \leq \mathbb{C}^{\text{hom}} \leq \overline{\mathbb{C}}$$

- Bornes de Hashin–Shtrikman et Ponte-Castañeda–Willis [Ponte Castañeda & Willis (1995) J Mech Phys Solids]
- Bornes à trois points [Beran (1965) Il Nuovo Cimento, Milton (1982) J Mech Phys Solids]

Quelques références

1. Eshelby, J.D. (1957) The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems. Proceedings of the Royal Society. A241: 376-396.
2. Hashin, Z., Shtrikman, S. (1963) A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behavior of Multiphase Materials". J. Mech. Phys. Sol. 11: 127-140
3. Hill, R. (1965) A Self-Consistent Mechanics of Composite Materials. J. Mech. Phys. Sol. 13: 213-222.
4. Mori, T., Tanaka, K. (1973) Average Stress in the Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions. Acta Metall. 21: 571-574
5. J.R. Willis (1977) Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. J. Mech. Phys. Sol. 25: 185-202
6. Kanit T. et al. (2003). Determination of the Size of the Representative Volume Element for Random Composites: Statistical and Numerical Approach. Int. J. Sol. Struct. 40: 3647-3679
7. L. Dormieux, D. Kondo, F.J. Ulm. (2006) Microporomechanics. Wiley